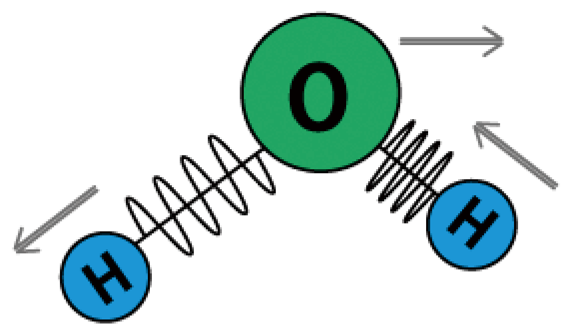
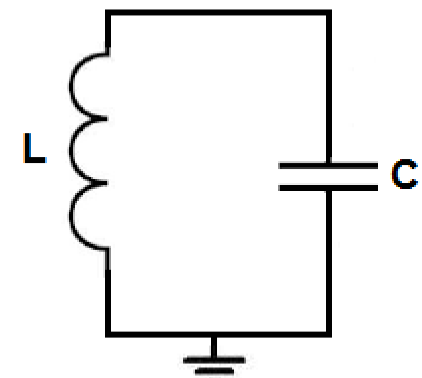
Introduzione alla fisica
261SM
Oscillazioni

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it

Oscillazioni





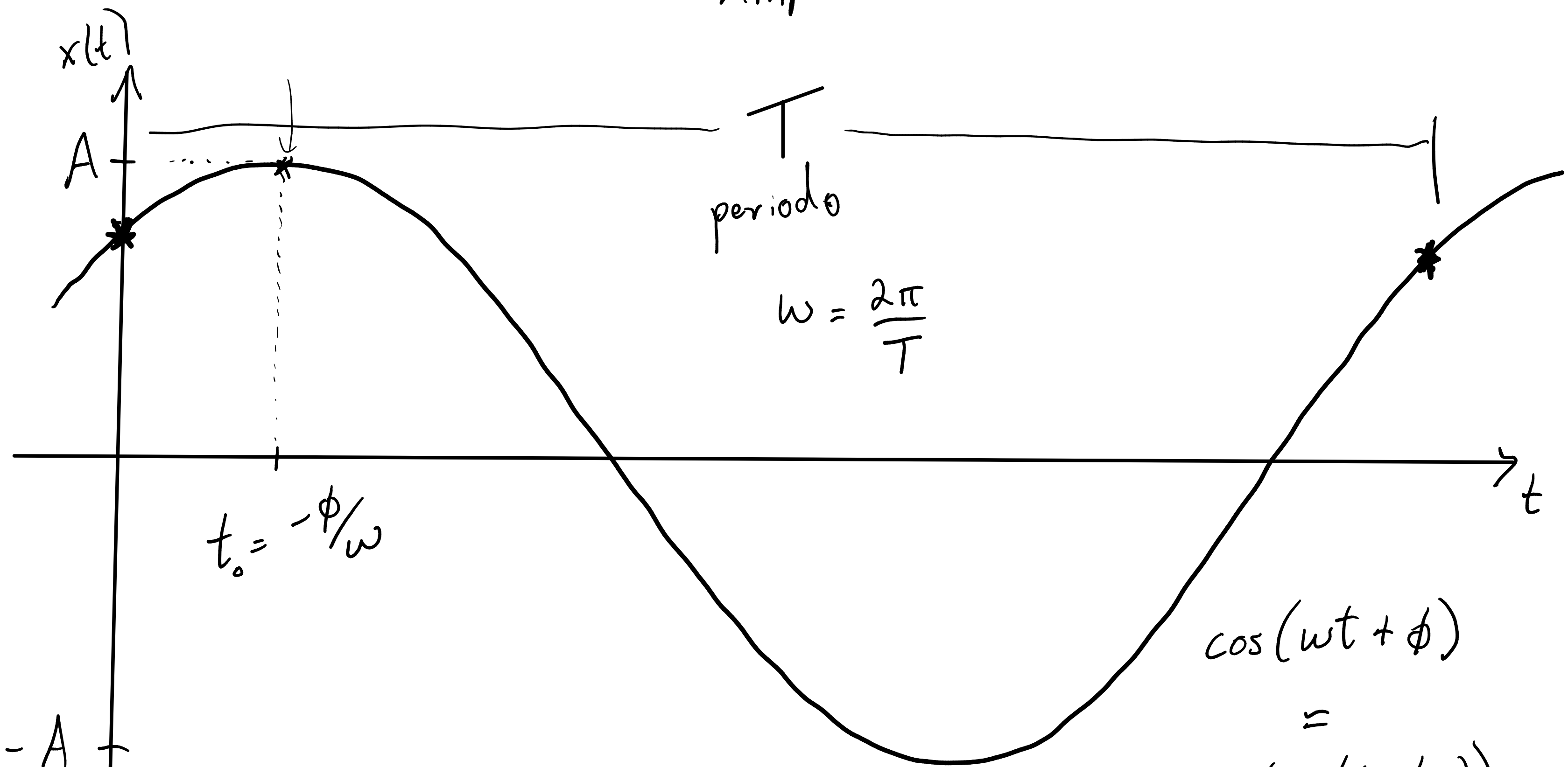
Moto armonico

una quantità fisica

$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{Ampiezza}} \cos(\overset{\text{pulsazione}}{\omega} t + \underbrace{\phi}_{\text{fase}})$$

frequenza: $f = \frac{1}{T}$

pulsazione: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$



$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t - t_0))$$

Cinematica del moto armonico

$x(t)$: posizione

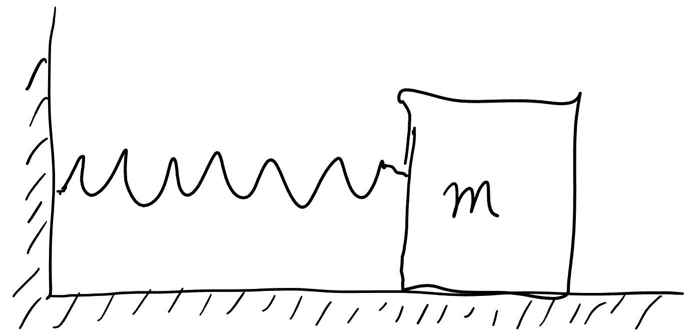
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

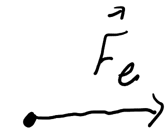
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

equazione differenziale del moto armonico

Dinamica





$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Downarrow$$

$$m a_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m} x$$

$$\Downarrow !$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow$$

Osservazione:
pulsazione indipendente dell'ampiezza!

Energia

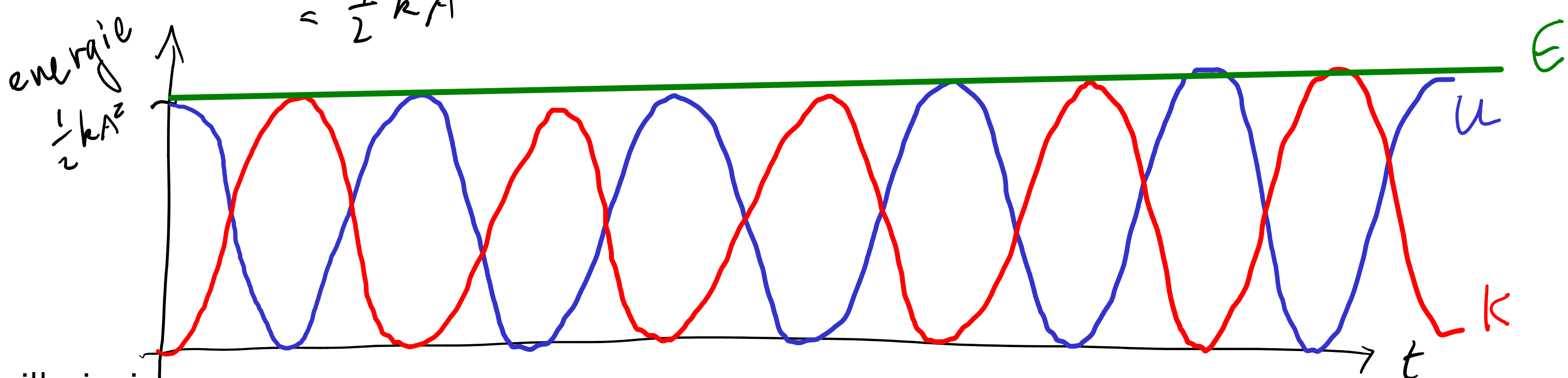
Energia mecanica totale: $E = K + U$ $\qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E = U + K = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} \underbrace{m \omega^2}_{k} A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2$$



Die Entdeckung des Pendelgesetzes durch Galilei.

(Mit Bild auf Seite 329.)

Das Pendel wird von den meisten Menschen für nichts Anderes als eine Art Hilfsinstrument an der Uhr angesehen, während in Wirklichkeit das Pendel die eigentliche Uhr ist, und all' die Räder, Ketten, Hebel, Schrauben und Zeiger nur dazu dienen, die Schwingungen zu zählen und anzuzeigen, welche das Pendel in genauen Zeitabschnitten macht. Ja, dieses einfache Ding, bestehend aus einem frei aufgehängten Stab oder einer Schnur, an deren unterem Ende ein Gewicht befestigt ist, gehört zu den wunderbarsten und nützlichsten Instrumenten, durch welche uns die tiefsten Einblicke in die Räthsel der uns umgebenden Natur, die schärfsten astronomischen Beobachtungen, Beweise für die Bewegung der Erde um sich selbst, Aufschlüsse über ihre Gestalt, ihre Schwere, die Wirkung ihrer Anziehungskraft, ja ihre innere Beschaffenheit erst ermöglicht werden. Nun hat man zwar von jeher Pendel in mannigfacher Gestalt gehabt, aber man wußte nichts Rechtes mit ihnen anzufangen, bevor nicht Galileo Galilei, dieser genialste Physiker des 16. Jahrhunderts, das Pendelgesetz entdeckt hatte. Dies gelang ihm bereits während seiner Studienzeit in Pisa, und damit eröffnete er die Reihe seiner großen wissenschaftlichen Entdeckungen, die ihm eine Ehrenstelle unter den größten Geistern der Menschheit gesichert haben. Galilei hatte im Jahre 1581 als siebzehnjähriger Jüngling die Universität Pisa bezogen, um dort Philosophie und Medizin zu studiren. Bald aber wandte er sich den Naturwissenschaften zu, die damals bekanntlich noch sehr im Argen lagen. Eines Tages wohnte der junge Student der Messe im Dom zu Pisa bei. Von der Decke des Gebäudes hing eine Lampe herab, die, an ihrer Kette schwebend, beim Anzünden einen starken Anstoß erhalten hatte und nun langsam hin und her schwang, ein Vorgang, der die Aufmerksamkeit des Studenten weit mehr fesselte, als die vor sich gehende Ceremonie. Während die Menge betete und die Orgel erbrauste, hatte Galileo unablässig sein Auge auf die schwingende Lampe geheftet. Er gewahrte, daß die Schwingungen derselben immer kürzer wurden, die Lampe immer kleinere Bogen beschrieb, aber ungeachtet dessen die Zeit der Schwingung immer dieselbe blieb. Dies erschien ihm höchst seltsam. Er begab sich alsbald nach Hause, um der Sache auf den Grund zu gehen, und seine Versuche zeigten ihm alsbald klar die neue Wahrheit: daß die Zeit, welche ein Pendel zu seinen Schwingungen gebraucht, immer dieselbe bleibt und nur von der Länge des Pendels, nicht aber von der Größe des Bogens, welche es beschreibt, abhängig ist. Die Entdeckung dieses „Pendelgesetzes" ist von der größten Wichtigkeit für den Fortschritt der Naturwissenschaften geworden. Unser Bild auf S. 329 veranschaulicht uns jene denkwürdigen M[...] denen Galileo der neuen Erkenntniß inne wurde. Diese ha[...] gemein fruchtbringend für die Wissenschaft wie für das praktische Leben

darüber, daß ihm das Schicksal nur einen Postkutscher bestimmt. Jetzt war er alt, und das Hornblasen hatte er wegen asthmatischer

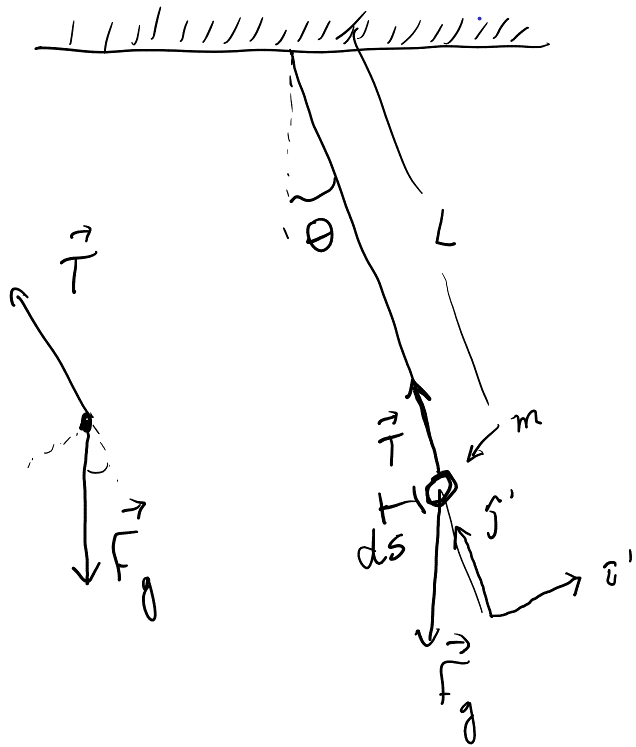
[...]

phanten allein arbeiten, wirken bei der auf unserem oberen Bilde

"Un giorno il giovane studente assistette alla messa nel duomo di Pisa. Dal soffitto dell'edificio pendeva una lampada che, appesa alla sua catena, al momento dell'accensione, aveva ricevuto un forte colpo ed ora dondolava lentamente avanti e indietro, un fenomeno che attrasse l'attenzione dello studente molto di più della cerimonia in corso. Mentre la folla pregava e l'organo suonava, Galileo non staccava gli occhi dalla lampada che dondolava. Notò che le oscillazioni diventavano sempre più brevi, la lampada descriveva archi sempre più piccoli ma, ciò nonostante, il periodo delle oscillazioni restava sempre lo stesso."

fonte: http://www.illaboratoriodigalileogalilei.it/galileo/iconografia/ico_ver/riv_lib/riv021_b.html

Pendolo



$$\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

lungo $\hat{i}'$: componente di $\vec{T} = 0$

$$(\vec{T} \cdot \hat{i}' = 0)$$

$$\underbrace{\vec{F}_g \cdot \hat{i}'}_{-\cancel{m} g \sin\theta} = m a_s$$

$$-\cancel{m} g \sin\theta = \cancel{m} \underbrace{\frac{d^2 s}{dt^2}}_{L \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \xrightarrow{\sim} \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$$

serie di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

θ piccolo $\rightarrow$ $\sin\theta \simeq \theta$

Pendolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

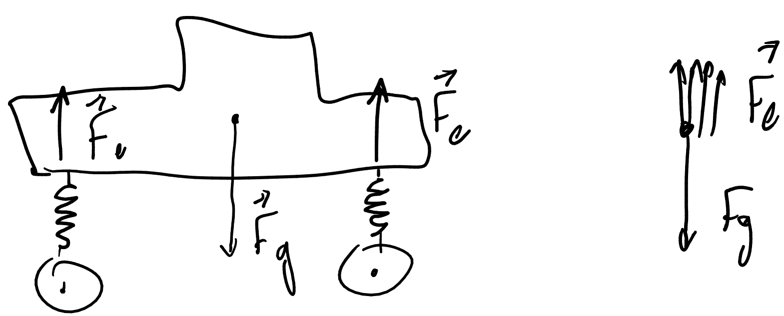
Quale il periodo di un pendolo lungo 1 m?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\sqrt{\frac{L\pi^2}{g}} \simeq 2\,s$$

Esercizio

60. •• Le sospensioni di un'auto di massa 2000 kg cedono di 10 cm quando su di esse viene posto il telaio. Inoltre, l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce del 50% a ogni ciclo. Stimate i valori (a) della costante elastica k e (b) della costante di smorzamento b della molla e dell'ammortizzatore di una ruota, supponendo che ogni ruota sostenga 500 kg.

a)



equilibrio: $m\vec{a} = 0 = \sum_i \vec{F} = \vec{F}_g + 4\vec{F}_e$

$F_e = -ky$

$0 = -mg - 4ky \Rightarrow k = \dfrac{-mg}{4y} \simeq 4{,}9 \times 10^5 \; N/m$

b)

$$\underbrace{\dfrac{A(t=T)}{A(t=0)}}_{e^{-\gamma T}} = 0{,}5$$

$e^{-\gamma T} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\gamma T} = 2$

$\gamma T = \ln 2$

$\gamma = \dfrac{b}{2m} \rightarrow \dfrac{bT}{2m} = \ln 2$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \quad 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{4k}} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{4k}{m}}$

Esercizio

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$\gamma T = \ln 2$$

$$\gamma \frac{2\pi}{\omega_s} = \ln 2$$

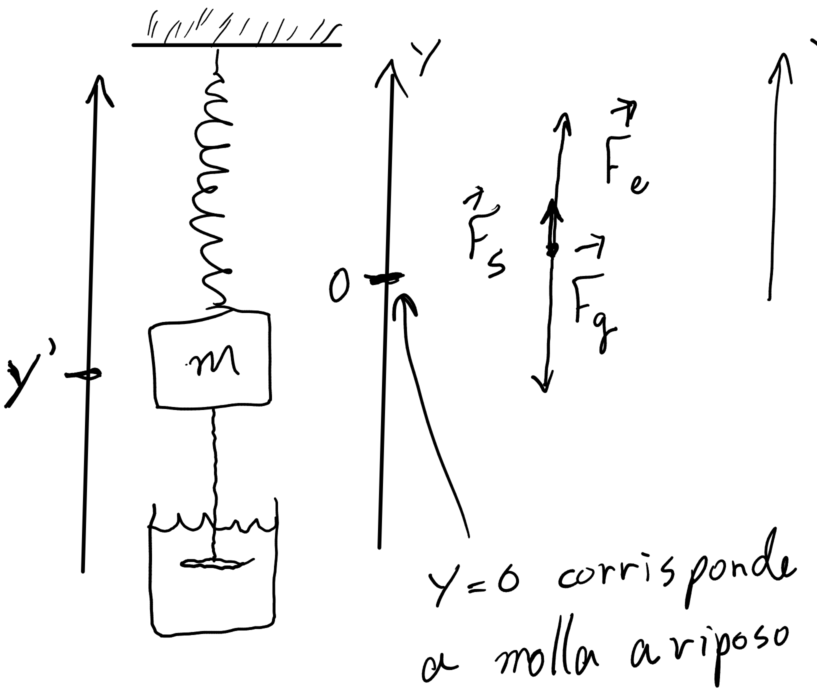
$$2\pi\gamma = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\ \ln 2$$

$$4\pi^2\gamma^2 = (\omega^2 - \gamma^2)(\ln 2)^2$$

$$\gamma^2\left(4\pi^2 + (\ln 2)^2\right) = \omega^2(\ln 2)^2$$

$$\gamma = \frac{\omega \ln 2}{\sqrt{4\pi^2 + (\ln 2)^2}} \cong 1{,}7\ s^{-1} \qquad b = 2m\gamma = 6{,}8 \times 10^3\ kg/s$$

Moto armonico smorzato



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$ma_y = -mg - ky \overbrace{-bv_y}^{F_s} \quad *$$

y_0 : punto di equilibrio

↳ se a_y e $v_y = 0$

allora $y = y_0$

$$\underbrace{mg = -ky_0} \Rightarrow y_0 = -\frac{m}{k}g$$

$$ma_y = ky_0 - ky - bv_y$$

$$ma_y = -k(y - y_0) - bv_y$$

$$y' = y - y_0$$

$$ma_{y'} = -ky' - bv_{y'}$$

Moto armonico smorzato

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = -\frac{k}{m} y' - \frac{b}{m}\frac{dy'}{dt}$$

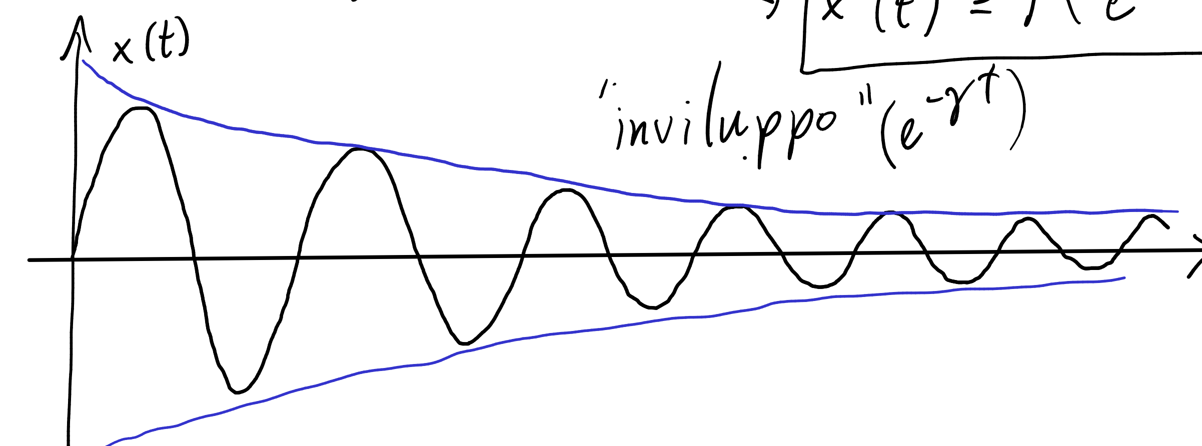
moto armonico smorzato

$$\left.\begin{aligned} y' &= x \\ \frac{k}{m} &= \omega^2 \\ \frac{b}{2m} &= \gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0}$$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \phi)}$$

$$\omega_s = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$



Moto armonico smorzato

$\boxed{\omega > \gamma}$

1) sotto - smorzamento

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \phi)$$

$$\omega_s = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$\boxed{\omega = \gamma}$

2) smorzamento critico

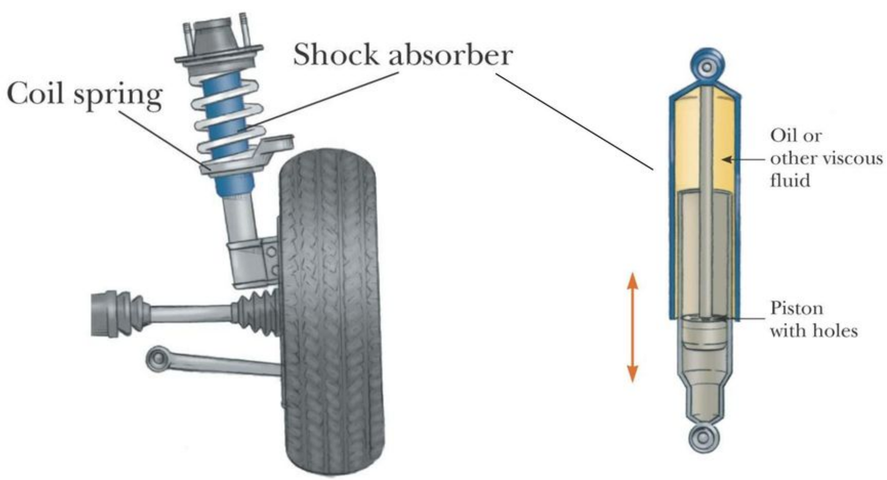
$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

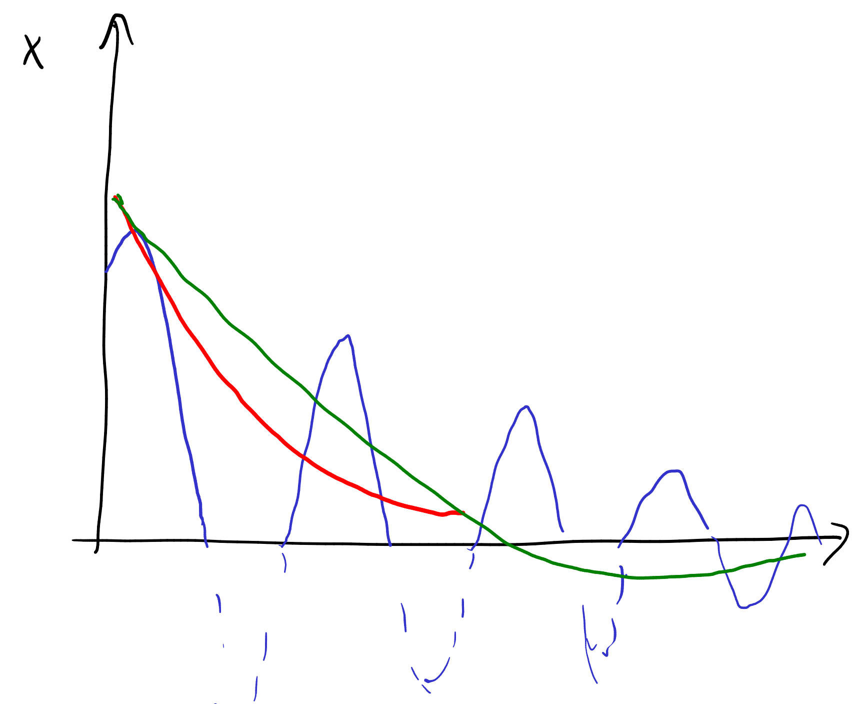
$\boxed{\omega < \gamma}$

3) sovra smorzamento

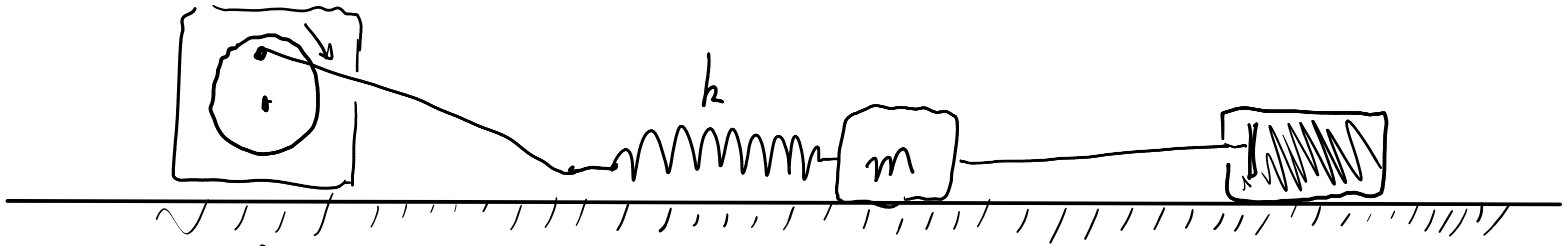
$$x(t) = e^{-\gamma t}(A e^{-ct} + B e^{ct})$$

$$c = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$





Moto armonico forzato



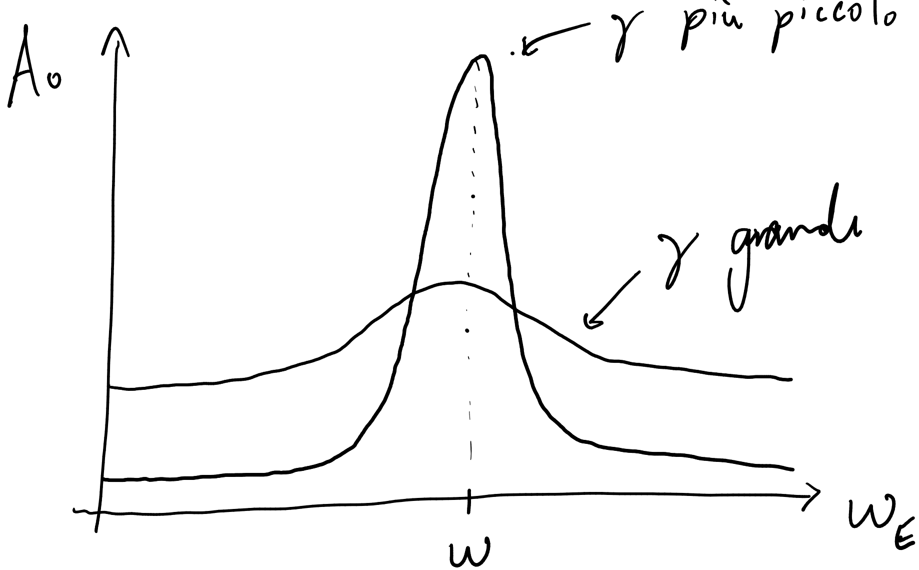
Forza periodica esterna

$$\sum_i F_x = m a_x = -kx - b v_x + F_0 \cos \omega_E t$$

$\hookrightarrow$ soluzione : $x(t) = A_0 \cos(\omega_E t + \phi_E)$

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_E^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_E^2}} \qquad \tan\phi_E = \frac{2\gamma\,\omega_E}{\omega^2 - \omega_E^2}$$

Moto armonico forzato



Moto armonico forzato

Ponte Tacoma Narrows (USA, 1940)