Un fusto metallico vuoto di $m = 4Kg$ *di massa e capacità di 5 litri viene completamente immerso attraverso una fune in una vasca piena di olio* $d = 765Kg/m^3$. *Calcolare la spinta di Archimede subita dal fusto e la tensione che deve avere la fune per mantenerlo in equilibrio all'interno del liquido.*

Ricordando il concetto di Spinta di Archimede, basterà effettuare il seguente calcolo:

$$S_a = d_{olio} \cdot V_{fusto} \cdot 9,81$$

Ricordando che 1 litro $= 1dm^3$, si ha che $V_{fusto} = 0,005m^3$, quindi:

$$S_a = 765 \cdot 0,005 \cdot 9,81 = 37,52N$$

La tensione della fune τ sarà la forza uguale e contraria alla forza peso netta che agisce sul fusto, che è naturalmente la differenza fra la forza-peso che il fusto subirebbe fuori dal liquido e la spinta di Archimede. Tale differenza di forze si chiama anche perdita di peso. Si ha quindi che:

$$\tau = F_p - S_a = 4 \cdot 9,81 - 37,52 = 1,72N$$

In un pezzo di legno (densità $0,5\,gr/cm^3$) di massa $800\,gr$ si pratica un foro di volume $200\,cm^3$, riempiendolo di piombo (densità $11\,gr/cm^3$). In acqua il corpo galleggia o affonda?

Trasformiamo le unità di misura:

- $d_{legno} = 0,5\ g/cm^3 = 500Kg/m^3$
- $m_{legno} = 800g = 0,8Kg$
- $V_{foro} = 200cm^3 = 0,0002m^3$
- $d_{piombo} = 11\ g/cm^3 = 11.000Kg/m^3$

Il volume del solido intero vale

$$V_{tot} = \frac{m_{legno}}{d_{legno}} = 0,0016\,m^3$$

.

Il volume della cavità vale $0,0002\,m^3$, quindi il volume netto del legno sarà di

$$V_{legno} = 0,0016 - 0,0002 = 0,0014\,m^3$$

La massa della cavità riempita di piombo vale:

$$m_{Piombo} = V_{foro} \cdot d_{Piombo} = 2,200\,Kg$$

La forza peso è data da $F_p = m \cdot g = d \cdot V \cdot g$.

Nel nostro caso specifico la massa è quella di due materiali diversi, a cui competono volumi diversi, quindi:

$$F_p = (m_{piombo} + m_{legno}) \cdot g = 29,43N$$

La spinta di Archimede è data dal peso del liquido che tutto il solido sposta quando lo si immerge completamente in acqua e vale:

$$S_a = V_{tot} \cdot d_{H_2O} \cdot g = 15,7N$$

Dal momento che si ha che $F_p > S_a$, il corpo, immerso nell'acqua, affonda!

Esempio 7. *Abbiamo un lastrone di ghiaccio (densità = 917 kg/m^3) a forma di parallelepipedo, con spessore 80 cm e spigoli 3,5 m e 9 m; calcolare il volume immerso nell'acqua di mare (densità = 1025 kg/m^3). Se su di esso lasciamo al centro della superficie del ghiaccio un cubo di marmo avente spigolo pari a 70 cm, qual è il volume immerso?* Il volume immerso del lastrone è fornito dall'equaz. 4:

$$V_{\text{imm}} = \frac{d_{\text{ghiaccio}}}{d_{\text{acq. mare}}} \cdot V_{\text{corpo}} = \frac{917\ \text{kg/m}^3}{1025\ \text{kg/m}^3} \cdot (0,8\ \text{m}) \cdot (3,5\ \text{m}) \cdot (9\ \text{m}) \simeq 0,895 \cdot 25,2\ \text{m}^3 \simeq 22,5\ \text{m}^3\ ;$$

il volume immerso è pari a circa l'89,5% del volume totale del corpo. Se ora poniamo il cubo di marmo sopra al lastrone, il peso totale del corpo è pari alla somma dei due pesi:

$$F_A = P_{\text{lastrone}} + P_{\text{cubo marmo}} \ \Rightarrow\ d_{\text{acq. mar.}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g = d_{\text{ghiac.}} \cdot V_{\text{lastr.}} \cdot g + d_{\text{marmo}} \cdot V_{\text{cubo marmo}} \cdot g$$

$$V_{\text{imm}} = \frac{d_{\text{ghiaccio}} \cdot V_{\text{lastrone}} + d_{\text{marmo}} \cdot V_{\text{cubo marmo}}}{d_{\text{acq. mare}}} = \frac{917\ \text{kg/m}^3 \cdot (25,2\ \text{m}^3) + 2500\ \text{kg/m}^3 \cdot (0.7\ \text{m})^3}{1025\ \text{kg/m}^3}$$

il risultato finale è $V_{\text{imm}} \simeq 23,4\ \text{m}^3$, ovviamente maggiore di quello $(22,5\ \text{m}^3)$ trovato in precedenza. Senza il cubo di marmo il livello dell'acqua era di $0,895 \cdot 80\ \text{cm} = 71,6\ \text{cm}$, mentre ora è di

$$\text{livello}_{\text{acqua}} = \frac{V_{\text{imm}}}{S_{\text{base}}} = \frac{23,4\ \text{m}^3}{(3,5\ \text{m}) \cdot (9\ \text{m})} \simeq 74,2\ \text{cm}\ ;$$

in sostanza, il lastrone si è abbassato di circa 2,6 cm a causa della presenza del marmo.

• *Cosa accade se il cubo di marmo ha uno spigolo di 110 cm?* La situazione cambia: seguendo lo stesso procedimento visto sopra, il volume immerso è pari a 25,8 m^3, mentre il volume del lastrone è solo di 25,2 m^3. Il volume immerso è però inferiore al volume totale del corpo formato dal lastrone e dal cubo di marmo, che è pari a 26,5 m^3; ciò significa che l'acqua sommerge completamente il lastrone di ghiaccio e solo parzialmente il cubo di marmo:

$$25,8 - 25,2 = 0,06\ \text{m}^3 \ \Rightarrow\ \text{livello di acqua sul cubo di marmo} = \frac{0,06\ \text{m}^3}{(1,1\ \text{m})^2} \simeq 48,9\ \text{cm}\,.$$

11. Una sfera di metallo di massa $m = 1\,\text{kg}$ e densità $\rho = 7.8 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$ è completamente immersa in acqua, ancorata al fondo di un recipiente mediante una molla di costante elastica $k = 250\,\text{N/m}$. Calcolare la spinta di Archimede, valutare se la molla è compressa o allungata e determinare lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Soluzione: noto il volume, ottenuto come $V = m/\rho = 1\,\text{kg}/7.8 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 = 1.28 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$, si può ricavare la spinta di Archimede $F_A = \rho_{fluido} V g = 1.25\ \text{N}$. Perché la sfera sia ferma occorre che la risultante delle forze sia nulla: $\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_{molla} = 0$. Scelta come positiva la direzione rivolta verso l'alto dell'asse verticale, l'espressione precedente diventa $F_A - mg + kx = 0$ da cui si ricava $x = -3.4\,\text{cm}$, Quindi la molla è compressa ed il modulo $|x| = 3.4\,\text{cm}$ rappresenta lo scostamento dalla posizione di equilibrio.

12. In quali condizioni un corpo immerso in un fluido di densità ρ_f galleggia?

Soluzione: per poter galleggiare occorre che la risultante delle forze che agiscono sul corpo sia positiva, cioè $\vec{P} + \vec{F}_A \geq 0$. Posti V e ρ rispettivamente il volume e la densità del corpo, occorre osservare che la massima intensità della spinta di Archimede si ha quando il corpo è completamente immerso ovvero quando $V_{im} = V$, quindi $\rho_f V g - \rho V g \geq 0$. Questa condizione è soddisfatta se la densità del corpo è minore della densità del fluido in cui è immerso $\rho < \rho_f$.

13. Un cubo di legno di lato $L = 20\,\text{cm}$ con una densità $\rho = 0.65 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$ galleggia parzialmente immerso in acqua: calcolare la distanza d fra la faccia superiore del cubo e la superficie dell'acqua. Determinare il peso massimo P che può essere messo sul cubo affinché la sua faccia superiore sia a livello dell'acqua.

Soluzione: il corpo è soggetto a due forze: la forza peso rivolta verso il basso e la spinta di Archimede rivolta verso l'alto. La spinta di Archimede è proporzionale al volume $V_{immerso} = L^2 h_{immerso}$ della parte del cubo immersa nell'acqua: $F_A = \rho_{fluido} V_{immerso}\, g$. Poiché il corpo è in equilibrio il modulo delle due forze deve essere uguale. Pertanto $\rho_{fluido} V_{immerso}\, g = V \rho g$ da cui $h_{immerso} = L \dfrac{\rho}{\rho_{fluido}} = 13\,\text{cm}$ e $d = 7\,\text{cm}$.

Quando il cubo è completamente sommerso la spinta di Archimede diventa $F'_A = \rho_{fluido} V g$. Anche in questo caso la risultante delle forze deve essere nulla, pertanto $\rho V g + P = \rho_{fluido} V g$ da cui $P = (\rho_{fluido} - \rho) V g = 27.44\,\text{N}$.