Capitolo 3

GEOMETRIA PROIETTIVA

(da Wikipedia - Enciclopedia libera)

La geometria proiettiva è la parte della geometria che modellizza i concetti intuitivi di prospettiva e orizzonte. Definisce e studia gli enti geometrici usuali (punti, rette, ...) senza utilizzare misure o confronto di lunghezze. Lo geometria proiettiva è la geometria "vista da un occhio".

La geometria proiettiva può essere pensata informalmente come la geometria che nasce dal collocare il proprio occhio in un punto dello spazio, così che ogni linea che intersechi l'"occhio" appaia solo come un punto. Le grandezze degli oggetti non sono direttamente quantificabili (perché guardando il mondo con un occhio soltanto non abbiamo informazioni sulla profondità) e l'orizzonte è considerato parte integrante dello spazio. Come conseguenza, nella geometria piana proiettiva due rette si intersecano sempre, non esistono quindi due rette parallele e distinte che non hanno punti di intersezione.

Cenni storici

L'origine della geometria proiettiva è legata agli sforzi di un artista e matematico francese, Girard Desargues (1591-1661), che cercava una via alternativa per il disegno in prospettiva, che generalizzasse l'uso dei punti di fuga e includesse il caso in cui questi sono infinitamente lontani. Egli inquadrò quindi la geometria euclidea all'interno di un sistema geometrico più generale.

La geometria proiettiva si sviluppò quindi più ampiamente nella prima metà del diciannovesimo secolo. Storicamente, questo sviluppo può essere letto come un passaggio intermedio tra la geometria analitica (introdotta da Descartes nel XVII secolo) e la geometria algebrica (che occupa un ruolo cruciale nel XX secolo).

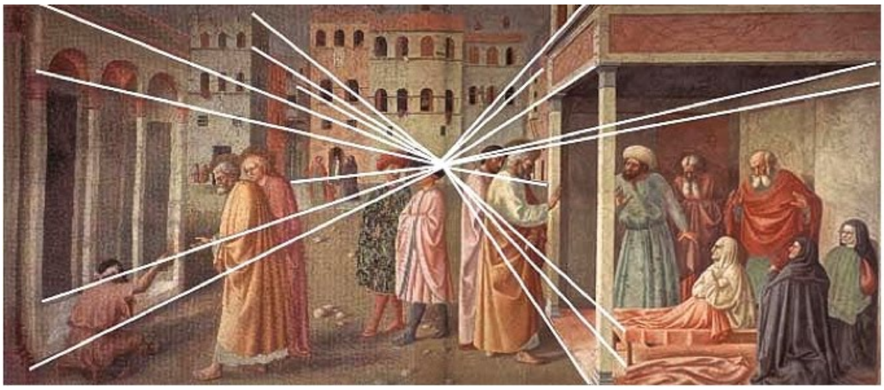
Il passaggio dalla geometria analitica a quella proiettiva si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane (ad esempio del piano cartesiano) con delle nuove coordinate, dette coordinate omogenee. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni "punti all'infinito", che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti "finiti" (da cui il carattere omogeneo del nuovo spazio, in cui tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

I matematici del XIX secolo si resero conto che in questo nuovo contesto "omogeneo" molti teoremi risultavano più semplici ed eleganti: questo grazie alla scomparsa di molti "casi eccezionali", generati da configurazioni particolari (quali ad esempio quella di due rette parallele nel piano), proprie della geometria euclidea ma assenti nella proiettiva. In particolare lo studio delle curve risultava semplificato nel contesto proiettivo: tramite l'utilizzo dell'algebra lineare vennero classificate le coniche, e matematici come Julius Plücker iniziarono a rappresentare le curve come punti di altri spazi proiettivi, generalmente più grandi.

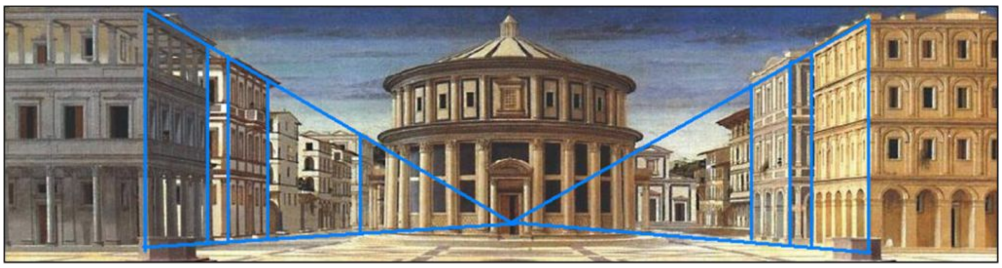
I matematici che per primi introdussero la geometria proiettiva, tra cui Poncelet e Steiner, non intendevano inizialmente estendere la geometria analitica. Le tecniche di dimostrazione erano inizialmente sintetiche (cioè simili a quelle di Euclide, senza l'ausilio dell'algebra), e lo spazio proiettivo era introdotto su base assiomatica (con assiomi simili a quelli di Euclide). Per questo motivo una riformulazione rigorosa dei lavori di questi matematici in chiave odierna è spesso difficile: anche nel caso più semplice del piano proiettivo, il loro approccio assiomatico comprende anche modelli diversi da quello definito oggi (e non studiabili tramite l'algebra lineare).

Verso la fine del secolo la scuola italiana (composta tra gli altri da Castelnuovo, Enriques e Severi) uscì dal solco della tradizione finendo per trovarsi ad affrontare nuovi problemi che richiedevano tecniche algebriche sempre più potenti. Nacque quindi la geometria algebrica.

Masolino - *La Guarigione dello storpio e resurrezione di Tabita* (affresco - Cappella Brancacci - Santa Maria del Carmine, Firenze) 1424-1425



Anonimo - *La città ideale* (Urbino, Galleria Nazionale) 1473 c.



3.1 Spazi proiettivi

Definizione 3.1.1. Sia V un K-spazio vettoriale. Si dice *spazio proiettivo su* V l'insieme $\mathbb{P}(V)$ di tutti i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di V. Diciamo che la *dimensione* di $\mathbb{P}(V)$ è

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim_K(V) - 1.$$

In particolare, se $V = \{0_V\}$, allora $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ e, per convenzione, la sua dimensione è -1.
Infine diciamo *punti* gli elementi di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 3.1.1. Un modo equivalente per introdurre lo spazio proiettivo è il seguente. Nell'insieme $V \setminus \{0_V\}$ si introduca la seguente relazione:

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \ v = \lambda v'.$$

Si prova facilmente (✍) che $\sim$ è una relazione d'equivalenza e che le classi d'equivalenza sono le rette vettoriali di V private del vettore nullo.
Si denoti con $\pi : V \setminus \{0_V\} \to \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva definita da $\pi(v) = \langle v \rangle$. E' facile verificare che π induce una biiezione naturale

$$\overline{\pi} : \quad \frac{V \setminus \{0_V\}}{\sim} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}(V).$$

Identificando quindi i due insiemi, con un leggero abuso di notazione, denoteremo i punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ con $P = \langle v \rangle = [v]$ dove $v \in V \setminus \{0_V\}$ (anche se, più precisamente, $[v] = \langle v \rangle \setminus \{0_V\}$).

Definizione 3.1.2. La suddetta applicazione π viene anche detta *proiezione canonica* da uno spazio vettoriale al suo proiettivizzato.

Esempio 3.1.1. Se $\dim_K(V) = 1$ allora $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione 0 e consiste di un solo punto.

Definizione 3.1.3. Se $V = K^{n+1}$, denotiamo $\mathbb{P}(K^{n+1})$ con $\mathbb{P}^n_K$ che viene detto *n-spazio proiettivo numerico.* In particolare, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ è detta *retta proiettiva reale*, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è detto *piano proiettivo reale*, ecc.
I punti di $\mathbb{P}^n_K$, che sono del tipo $[(x_0, \ldots, x_n)]$, con $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, vengono denotati semplicemente con $[x_0, \ldots, x_n]$.

Utilizziamo questa notazione anche nel caso generale, introducendo la seguente nozione.

Definizione 3.1.4. Un *sistema di riferimento proiettivo* in $\mathbb{P}(V)$ è la scelta di una base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ dello spazio vettoriale V. In tal modo, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n, \quad (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Diciamo dunque che gli $n+1$ scalari $x_0, \dots, x_n$ sono le *coordinate omogenee* del punto $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e scriviamo

$$P = [x_0, \dots, x_n].$$

Osservazione 3.1.2. Le coordinate omogenee di un punto sono definite a meno di una costante non nulla di proporzionalità. Infatti, si considerino i vettori non nulli di V:

$$v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n, \quad v' = \lambda v = \lambda x_0 e_0 + \cdots + \lambda x_n e_n, \quad \lambda \neq 0.$$

Chiaramente $v \sim v'$, cioè $[v] = [v']$ e quindi ne segue che

$$[x_0, \dots, x_n] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n].$$

Quindi uno stesso punto ha infinite $(n+1)$-uple di coordinate omogenee, tutte proporzionali.
Come conseguenza, due basi proporzionali di V individuano lo stesso riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e dunque ogni punto ha le stesse coordinate omogenee in entrambi i riferimenti.

Dalla definizione di sistema di riferimento proiettivo si ha immediatamente il seguente risultato, che enunciamo per semplicità per gli spazi proiettivi numerici.

Proposizione 3.1.1. *Siano dati in $\mathbb{P}^n_K$ due riferimenti proiettivi associati alle basi $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_0, e'_1, \dots, e'_n)$ dello spazio vettoriale K^{n+1}. Sia $P \in \mathbb{P}^n_K$ avente per coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $[x'_0, \dots, x'_n]$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Si denotino i vettori di tali coordinate con*

$$X := {}^t(x_0, \dots, x_n), \quad X' := {}^t(x'_0, \dots, x'_n) \in K^{n+1}.$$

Se $A := M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ è la matrice di cambio di base avente sulle colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ allora si ha

$$X' = \lambda A X, \quad \lambda \in K.$$

Esempio 3.1.2. Siano dati i riferimenti proiettivi in $\mathbb{P}^2$ associati alle due basi $\mathcal{B} = ((1,2,3),(0,1,-1),(0,1,1)))$ e a quella canonica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Se $P \in \mathbb{P}^2$ ha coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ rispetto a $\mathcal{B}$, determinare

le sue coordinate omogenee $[x'_0, x'_1, x'_2]$ rispetto a $\mathcal{E}$.
Chiaramente

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi, esplicitando la relazione $X' = \lambda AX$, si ottiene

$$\begin{cases} x'_0 & = & \lambda x_0 \\ x'_1 & = & \lambda(2x_0 + x_1 + x_2) \\ x'_2 & = & \lambda(3x_0 - x_1 + x_2) \end{cases}.$$

Pertanto le coordinate omogenee di P rispetto a $\mathcal{E}$ sono

$$[x'_0, x'_1, x'_2] = [x_0, 2x_0 + x_1 + x_2, 3x_0 - x_1 + x_2].$$

Un sistema di riferimento proiettivo non ha un punto che svolga le funzioni di “origine” (anche perché non esiste il punto che ha tutte le coordinate omogenee nulle). Tuttavia ci sono alcuni punti particolari.

Definizione 3.1.5. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, dotato di riferimento proiettivo $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$, diciamo *punti fondamentali* i seguenti:

$$E_0 := [e_0] = [1, 0, \ldots, 0], \ \ldots, \ E_n := [e_n] = [0, 0, \ldots, 1].$$

Diciamo inoltre *punto unità* quello definito da

$$U := [1, 1, \ldots, 1].$$

Esempio 3.1.3. Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ ci sono due punti fondamentali $E_0 = [1, 0]$, $E_1 = [0, 1]$ e il punto unità $U = [1, 1]$.
Nel piano $\mathbb{P}^2$ i tre punti fondamentali sono $E_0 = [1, 0, 0]$, $E_1 = [0, 1, 0]$, $E_2 = [0, 0, 1]$ e il punto unità $U = [1, 1, 1]$.
Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ i punti fondamentali sono quattro e precisamente $E_0 = [1, 0, 0, 0]$, $E_1 = [0, 1, 0, 0]$, $E_2 = [0, 0, 1, 0]$, $E_3 = [0, 0, 0, 1]$, mentre il punto unità è $U = [1, 1, 1, 1]$.

Definizione 3.1.6. Se W è un sottospazio non nullo di V, diciamo che $\pi(W \setminus \{0_V\})$ è un *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ e lo denoteremo con $\mathbb{P}(W)$. Diremo *dimensione* di $\mathbb{P}(W)$ il numero non negativo

$$\dim \mathbb{P}(W) := \dim_K W - 1$$

e *codimensione* di $\mathbb{P}(W)$ in $\mathbb{P}(V)$ il numero non negativo

$$\operatorname{codim} \mathbb{P}(W) := \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W).$$

In particolare, si dicono *iperpiani* i sottospazi proiettivi di codimensione 1, *rette* quelli di dimensione 1, *piani* quelli di dimensione 2.

Proposizione 3.1.2. *Se U e W sono sottospazi vettoriali di V allora*

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W).$$

In particolare, $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset$ se e solo se $U \cap W = \{0_V\}$. Conseguentemente, l'intersezione di sottospazi proiettivi, se non vuota, è un sottospazio proiettivo.

Dimostrazione. Immediata, dalla costruzione dello spazio proiettivo secondo l'Osservazione 3.1.1 e dalle proprietà (insiemistiche) delle applicazioni. □

Ricordiamo la relazione di Grassmann per sottospazi vettoriali.

Teorema 3.1.3. *Sia V un K-spazio vettoriale e U, W suoi sottospazi vettoriali. Allora*

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$

Da tale relazione si deduce l'analogo risultato per sottospazi proiettivi.

Teorema 3.1.4. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)$ suoi sottospazi proiettivi. Allora*

$$\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)).$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim_K(U + W) - 1$, $\dim \mathbb{P}(U) = \dim_K(U) - 1$, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim_K(W) - 1$ e, infine, che

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) = \dim(\mathbb{P}(U \cap W)) = \dim_K(U \cap W) - 1,$$

dove la prima uguaglianza segue dalla Proposizione 3.1.2. Si conclude applicando il Teorema 3.1.3. □

Se l'intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo, questo non è vero per l'unione. La nozione corrispondente è la seguente.

Definizione 3.1.7. Sia X un qualunque sottoinsieme non vuoto (finito o infinito) di $\mathbb{P}(V)$. L'insieme

$$L(X) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq X} \mathbb{P}(W)$$

si dice *sottospazio proiettivo generato da X*.

Esercizio P1. Provare che $\mathbb{P}(U + W) = L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))$.

Alla luce di questa uguaglianza, il Teorema precedente si può riformulare come segue:

$$\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)).$$

Osservazione 3.1.3. Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, si ha $\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) \leq n$. Pertanto la relazione precedente implica

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - n.$$

In particolare, se $\dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) \geq n$ allora necessariamente

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq 0,$$

dunque i due sottospazi sono incidenti.

Dall'Osservazione precedente discendono alcuni importanti fatti sulla posizione reciproca di sottospazi *nello spazio proiettivo.*

Esempio 3.1.4. Consideriamo due rette r e s in $\mathbb{P}^2$. Per quanto visto

$$\dim r + \dim s = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(r \cap s) \geq 0.$$

Pertanto due rette distinte del piano proiettivo sono sempre incidenti. Analoga considerazione vale per due piani π e σ in $\mathbb{P}^3$ e precisamente

$$\dim(\pi \cap \sigma) \geq \dim \pi + \dim \sigma - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Pertanto due piani distinti nello spazio proiettivo sono sempre incidenti in una retta. Infine, se r è una retta e π è un piano in $\mathbb{P}^3$, applicando ancora l'Osservazione precedente si ha

$$\dim(\pi \cap r) \geq \dim \pi + \dim r - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Chiaramente $\dim(\pi \cap r)$ può essere solo 0 o 1. Nel primo caso la retta e il piano si intersecano in un solo punto; nel secondo $r \subset \pi$.

Un'importante fatto è che non esiste la nozione di parallelismo tra sottospazi proiettivi (non essendoci quella di "giacitura"). Dunque due sottospazi proiettivi possono essere soltanto incidenti o non incidenti. Si tratterà, di volta in volta, di studiare la loro eventuale intersezione.

3.2 Equazioni cartesiane

Un iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(W)$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ corrisponde a un iperpiano vettoriale $W \subset V$ e, come abbiamo visto nel Capitolo 1 (Definizione 1.5.1), W ha una equazione cartesiana (una volta fissata una base di V) del tipo

$$W : \; a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$$

dove $a_i \in K$ per ogni i. È naturale chiedersi se tale equazione definisce anche $\mathbb{P}(W)$, una volta fissato un riferimento proiettivo. La risposta è affermativa. Infatti $P = [\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n] \in \mathbb{P}(W)$ se e solo se $(\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n) \in W$ se e solo se $a_0\overline{x}_0 + \cdots + a_n\overline{x}_n = 0$.
Si osservi infine che tale verifica non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee di P. Infatti, $P = [\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n] = [\lambda\overline{x}_0, \ldots, \lambda\overline{x}_n]$ (per ogni $\lambda \neq 0$) e ovviamente si ha

$$a_0\overline{x}_0 + \cdots + a_n\overline{x}_n = 0 \iff \lambda a_0\overline{x}_0 + \cdots + \lambda a_n\overline{x}_n = 0.$$

Possiamo dunque dire che

$$\mathbb{P}(W) : \; a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$$

è una *equazione cartesiana* dell'iperpiano $\mathbb{P}(W)$.

Esempio 3.2.1. Un iperpiano in $\mathbb{P}^2$ è una retta e dunque ha equazione

$$r : \; a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Un iperpiano in $\mathbb{P}^3$ è un piano e dunque ha equazione

$$\pi : \; a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

In $\mathbb{P}^n$ si dicono *iperpiani coordinati* quelli le cui equazioni, in un fissato riferimento proiettivo, sono le seguenti:

$$H_0 : \; x_0 = 0, \quad H_1 : \; x_1 = 0, \quad \ldots, \quad H_n : \; x_n = 0.$$

È chiaro che ogni iperpiano coordinato H_i contiene tutti i punti fondamentali eccetto E_i e, ovviamente, U non appartiene a nessuno degli iperpiani coordinati.

Quanto visto per l'equazione cartesiana di un iperpiano si generalizza a un sottospazio di qualunque dimensione.

Definizione 3.2.1. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n in cui si è fissato un riferimento proiettivo e siano $[x_0, \ldots, x_n]$ le sue coordinate omogenee. Se $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, posta s la sua codimensione, una *equazione cartesiana* di $\mathbb{P}(W)$ è un sistema lineare omogeneo che è equazione cartesiana di W in V, cioè del tipo

$$\mathbb{P}(W) : \ AX = 0$$

dove $A \in K^{s,n+1}$, $\mathrm{rk}(A) = s$ e $X = {}^t(x_0, \ldots, x_n)$. Esplicitamente:

$$\mathbb{P}(W) : \begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s0}x_0 + a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Osservazione 3.2.1. Dalla definizione precedente, è chiaro che ogni sottospazio proiettivo è intersezione di un numero finito di iperpiani proiettivi.

Esempio 3.2.2. L'equazione cartesiana di una retta in $\mathbb{P}^3$ è, ad esempio,

$$r : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Quella di un piano in $\mathbb{P}^4$ è, ad esempio,

$$\pi : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

Quella di una retta in $\mathbb{P}^4$ è, ad esempio,

$$s : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 & = & 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

(Quest'ultima equazione rappresenta effettivamente una retta...).

Ricordando la nozione di sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X (vedi Definizione 3.1.7), se in particolare $X = \{P_1, \ldots, P_s\}$ è costituito da un numero finito di punti, allora

$$L(P_1, \ldots, P_s) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \ldots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

Corollario 3.2.1. *Siano $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ punti distinti, dove $P_i = [v_i]$ e $v_i \in V$, per $i = 1, \ldots, s$. Allora*

$$L(P_1, \ldots, P_s) = \mathbb{P}(\langle v_1, \ldots, v_s \rangle).$$

In particolare, $\dim L(P_1, \ldots, P_s) \leq s - 1$.

Dimostrazione. Per definizione $L(P_1, \dots, P_s)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W)$ contenenti i punti $P_1, \dots, P_s$:

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

Chiaramente $\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s$ se e solo se $W \ni v_1, \dots, v_s$; quindi

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} W \right) = \mathbb{P}\left(\langle v_1, \dots, v_s \rangle\right)$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla Proposizione 3.1.2 e l'ultima dalla definizione di sottospazio vettoriale generato da certi vettori. □

Con le notazioni del Corollario precedente, $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1$ se e solo se $v_1, \dots, v_s$ sono vettori linearmente indipendenti.

Definizione 3.2.2. I punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ si dicono *(proiettivamente) indipendenti* se $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1$.

E' chiaro che il massimo numero di punti indipendenti in $\mathbb{P}^n$ è $n + 1$. Tuttavia si può richiedere un simile requisito di "indipendenza" a un numero maggiore di punti. Per questo diamo la seguente nozione.

Definizione 3.2.3. Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, diciamo che i punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ sono in *posizione generale* in uno dei seguenti casi:

- se $s \leq n + 1$ e $P_1, \dots, P_s$ sono proiettivamente indipendenti;
- se $s > n + 1$ e $P_1, \dots, P_s$ sono a $n + 1$ a $n + 1$ indipendenti (cioè ogni loro sottoinsieme di $n + 1$ punti è costituito da punti indipendenti).

Esempio 3.2.3. In $\mathbb{P}^2$ consideriamo s punti distinti. Se $s = 2$, allora i punti sono ovviamente indipendenti e quindi in posizione generale. Se $s = 3$, allora P_1, P_2, P_3 sono indipendenti se $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, dunque se e solo se i tre punti non appartengono a una stessa retta (in tal caso, infatti, sarebbe $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 1$:). Anche in questo caso, indipendenti equivale a essere in posizione generale.
Se $s = 4$, allora P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale se mai tre di essi sono dipendenti, cioè mai tre di essi sono allineati.
La stessa condizione caratterizza gli insiemi di s punti in posizione generale, con $s \geq 4$.

Esempio 3.2.4. In $\mathbb{P}^n$ in $E_0, \dots, E_n, U$ sono $n + 2$ punti in posizione generale. Per verificarlo, consideriamo tutti i loro sottoinsiemi di $n+1$ elementi. I punti $E_0, \dots, E_n$ sono proiettivamente indipendenti, in quanto

$$\dim L(E_0, E_1, \dots, E_n) = \dim_K \langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle - 1 = \dim_K K^{n+1} - 1 = n.$$

Gli altri sottoinsiemi sono costituiti da U e da n tra gli E_i. Ad esempio, calcoliamo

$$\dim L(U, E_1, \ldots, E_n) = \dim_K \langle u, e_1, \ldots, e_n \rangle - 1.$$

Si vede facilmente che i vettori $u, e_1, \ldots, e_n \in K^{n+1}$ sono linearmente indipendenti, ad esempio scrivendo le loro $n+1$ componenti in una matrice e osservando che essa ha determinante non nullo. Pertanto anch'essi generano tutto K^{n+1} e quindi si ha quanto affermato.

Questo esempio è, in qualche senso, generalizzato dal seguente risultato.

Teorema 3.2.2. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e siano $P_0, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ punti in posizione generale. Allora esiste un unico riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ nel quale $P_0, \ldots, P_n$ sono i punti fondamentali e P_{n+1} è il punto unità.*

<u>Dimostrazione</u>. Siano $P_i = [v_i]$ per $i = 0, 1, \ldots, n+1$, per opportuni $v_0, v_1, \ldots, v_{n+1} \in V$.
Per ipotesi $P_0, \ldots, P_n$ sono punti proiettivamente indipendenti, quindi i vettori $v_0, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e dunque una base di V.
Di conseguenza esistono $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Si osservi che tutti i λ_i sono non nulli. Infatti, se uno di essi fosse nullo, e.g. $\lambda_0 = 0$, si avrebbe $v_{n+1} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e quindi $v_1, \ldots, v_{n+1}$ sarebbero linearmente dipendenti. Di conseguenza, i punti $P_1, \ldots, P_{n+1}$ sarebbero proiettivamente dipendenti, contro l'ipotesi sulla posizione generale.
Sia $\mathcal{B} = (\lambda_0 v_0, \ldots, \lambda_n v_n)$: per quanto appena osservato, $\mathcal{B}$ è una base di V e dunque un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. In tale riferimento i punti dati hanno coordinate

$$\begin{gathered} P_0 = [v_0] = [\lambda_0 v_0] = [1, 0, \ldots, 0] \\ \vdots \\ P_n = [v_n] = [\lambda_n v_n] = [0, 0, \ldots, 1] \end{gathered} \quad .$$

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n] = [1, 1, \ldots, 1]$$

Pertanto, in tale riferimento, i punti dati sono, rispettivamente, i punti fondamentali e il punto unità. $\square$

3.3 Equazioni parametriche

Esprimere un sottospazio proiettivo come generato da un insieme di punti indipendenti fornisce un'ulteriore tipo di equazione.

Sia S un qualunque sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, dove $\dim_K V = n+1$.
Per definizione, $S = \mathbb{P}(W)$, dove W è un sottospazio vettoriale di V.
Posta $\dim_K W = s+1$, con $s \leq n$, possiamo scrivere $W = \langle w_0, \dots, w_s \rangle$, per opportuni vettori (linearmente indipendenti) $w_0, \dots, w_s \in V$.
Infine, ponendo $P_i = [w_i]$, per $i = 0, \dots, s$, per il Corollario 3.2.1

$$S = \mathbb{P}(W) = L(P_0, \dots, P_s)$$

Pertanto

$$Q \in S \iff Q = [v],\ v \in W \setminus \{0_V\} \iff Q = [\lambda_0 w_0 + \cdots + \lambda_s w_s] \tag{3.1}$$

con $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in K$ non tutti nulli.

Si fissi ora una base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ di V e di conseguenza un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ di coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$. Esprimendo i vettori $w_0, \dots, w_s$ sulla base $\mathcal{B}$ si individuano $(s+1) \times (n+1)$ scalari (a_{ij}):

$$\begin{cases} w_0 & = & a_{00}e_0 + \cdots + a_{0n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_s & = & a_{s0}e_0 + \cdots + a_{sn}e_n \end{cases}.$$

Moltiplicando ogni equazione per lo scalare λ_i corrispondente si ha

$$\begin{cases} \lambda_0 w_0 & = & \lambda_0 a_{00}e_0 + \cdots + \lambda_0 a_{0n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_s w_s & = & \lambda_s a_{s0}e_0 + \cdots + \lambda_s a_{sn}e_n \end{cases}.$$

A questo punto, possiamo esprimere estesamente le coordinate omogenee del punto $[\lambda_0 w_0 + \cdots + \lambda_s w_s]$ e, per comodità grafica, le scriviamo in verticale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \cdots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \cdots + \lambda_s a_{sn} \end{bmatrix}.$$

Se Q è il generico punto di $\mathbb{P}(V)$ di coordinate omogenee $Q = [x_0, \dots, x_n]$, l'equivalenza (3.1) diventa

$$Q \in S \iff \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \cdots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \cdots + \lambda_s a_{sn} \end{bmatrix}.$$

Questa uguaglianza tra coordinate omogenee significa l'uguaglianza delle componenti *a meno di un fattore di proporzionalità.* Tuttavia, convenzionalmente, si omette questa costante non nulla nella scrittura che esprime le coordinate omogenee del generico punto Q di S.

Infine si osservi che le componenti di w_i sulla base $\mathcal{B}$ sono, per definizione, le coordinate omogenee del punto P_i, per ogni $i = 0, \dots, s$.

Abbiamo pertanto provato il seguente risultato

Proposizione 3.3.1. *Sia $S = L(P_0, \dots, P_s) \subseteq \mathbb{P}(V)$ il sottospazio proiettivo generato dai punti indipendenti $P_0, \dots, P_s$ aventi coordinate omogenee (in un fissato riferimento proiettivo)*

$$P_0 = [a_{00}, \dots, a_{0n}], \quad \dots \quad , P_s = [a_{s0}, \dots, a_{sn}].$$

Allora S è costituito da tutti e soli i punti di coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ che verificano

$$\begin{cases} x_0 & = & \lambda_0 a_{00} + \cdots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \lambda_0 a_{0n} + \cdots + \lambda_s a_{sn} \end{cases} \tag{3.2}$$

al variare dei parametri $\lambda_i \in K$, non tutti nulli.

Definizione 3.3.1. L'espressione (3.2) si dice *equazione parametrica* del sottospazio proiettivo S.

Essendo $P_0, \dots, P_s$ dei punti proiettivamente indipendenti, $\dim S = s$.

Esempio 3.3.1. In $\mathbb{P}^2$ i punti (indipendenti in quanto distinti) $P_0 = [1, 2, 3]$ e $P_1 = [-1, 5, 7]$ generano un sottospazio proiettivo S di dimensione 1, cioè una retta. La sua equazione parametrica è

$$S : \quad \begin{cases} x_0 & = & \lambda_0 - \lambda_1 \\ x_1 & = & 2\lambda_0 + 5\lambda_1 \\ x_2 & = & 3\lambda_0 + 7\lambda_1 \end{cases} .$$

In generale, in $\mathbb{P}^n$ la retta per due punti $A = [a_0, \dots, a_n]$ e $B = [b_0, \dots, b_n]$ ha equazione parametrica

$$S : \quad \begin{cases} x_0 & = & \lambda a_0 + \mu b_0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \lambda a_n + \mu b_n \end{cases} .$$

Esempio 3.3.2. In $\mathbb{P}^3$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ consideriamo i 3 punti (indipendenti) $A = [1, 2, 3, 4]$, $B = [-1, 5, 7, 0]$, $C = [2, 0, 1, 1]$.

Essi generano un sottospazio proiettivo π di dimensione 2, cioè un piano. La sua equazione parametrica è

$$\pi : \begin{cases} x_0 &= \lambda - \mu + 2\nu \\ x_1 &= 2\lambda + 5\mu \\ x_2 &= 3\lambda + 7\mu + \nu \\ x_3 &= 4\lambda + \nu \end{cases} .$$

Per passare dall'equazione parametrica a quella cartesiana di un sottospazio proiettivo $S = \mathbb{P}(W)$ si può procedere in 2 modi: o eliminare i parametri o imporre che il generico vettore $(x_0, \ldots, x_n)$ sia combinazione lineare dei generatori di W. Illustriamo entrambe queste procedure nei seguenti esempi.

Esempio 3.3.3. Consideriamo la retta $S \subset \mathbb{P}^2$ vista nell'Esempio 3.3.1:

$$S : \begin{cases} x_0 &= \lambda - \mu \\ x_1 &= 2\lambda + 5\mu \\ x_2 &= 3\lambda + 7\mu \end{cases} .$$

Eliminiamo λ attraverso (ad esempio) la prima equazione e sostituendo nelle restanti si ha:

$$S : \begin{cases} \lambda &= x_0 + \mu \\ x_1 &= 2(x_0 + \mu) + 5\mu \\ x_2 &= 3(x_0 + \mu) + 7\mu \end{cases} .$$

Poi si elimina μ attraverso (ad esempio) la seconda equazione e si sostituisce nella terza:

$$S : \begin{cases} \lambda &= x_0 + \mu \\ \mu &= (x_1 - 2x_0)/7 \\ x_2 &= 3x_0 + 10\mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3x_0 + 10(x_1 - 2x_0)/7$$

e quindi

$$S : \quad x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0.$$

Esempio 3.3.4. Consideriamo ancora la retta $S \subset \mathbb{P}^2$ vista nell'Esempio 3.3.1 e imponiamo che (x_0, x_1, x_2) sia combinazione lineare dei vettori che corrispondono ai due punti dati P_0 e P_1, cioè $(1, 2, 3)$ e $(-1, 5, 7)$. Questo equivale a imporre

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

che porta al risultato dell'esempio precedente.

Esercizio P2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π dell'Esempio 3.3.2, partendo dalla sua equazione parametrica (anche in questo caso, basta calcolare il determinante di una matrice che, qui, è 4×4).

Nei due casi precedenti (retta nel piano e piano nello spazio) si tratta di due iperpiani e in entrambi i casi l'equazione cartesiana consiste nell'annullarsi di un determinante. Vediamo un esempio più generale.

Esempio 3.3.5. Sia $r \subset \mathbb{P}^3$ la retta generata dai punti $A = [1, 2, 3, 4]$ e $B = [-1, 5, 7, 0]$. Vogliamo determinarne l'equazione parametrica e quella cartesiana. Per quanto visto,

$$r: \quad \begin{cases} x_0 &= \lambda - \mu \\ x_1 &= 2\lambda + 5\mu \\ x_2 &= 3\lambda + 7\mu \\ x_3 &= 4\lambda \end{cases}.$$

Lasciamo per esercizio l'eliminazione dei 2 parametri λ e μ.
Vediamo invece come procedere nel secondo modo. Imponiamo che il vettore (x_0, x_1, x_2, x_3) sia combinazione lineare dei vettori $(1, 2, 3, 4)$ e $(-1, 5, 7, 0)$ o, equivalentemente, che

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Questo equivale a richiedere che i 4 minori 3×3 siano degeneri. Ma per il *Teorema dei minori orlati* (Capitolo 1, Proposizione 1.12.4) è sufficiente considerare i due minori 3×3 contenenti, ad esempio, le prime 2 colonne e quindi porre

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 = 0$$

ottenendo

$$r: \quad \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 &= 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 &= 0 \end{cases}.$$

Per passare dall'equazione cartesiana, data da un sistema lineare omogeneo $AX = 0$, a quella parametrica di un sottospazio proiettivo S, è sufficiente *risolvere* tale sistema lineare. La forma esplicita della sua generica soluzione dipende da alcune incognite libere che svolgono dunque il ruolo di parametri; tale espressione è esattamente un'equazione parametrica di S.