# Capitolo 16

# Esercizi sugli integrali doppi

## Brevi richiami di teoria

Sia $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ una funzione limitata e non negativa, definita sul rettangolo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in $n$ intervallini, diciamo $I_k,\ k = 1, \dots n$, e l'intervallo $[c,d]$ in $m$ intervallini, diciamo $J_h,\ h = 1, \dots, m$; denotiamo con $(x_k, y_h)$ il punto centrale del rettangolino $I_k \times J_h$. Si definisce integrale doppio di $f(x,y)$ sul rettangolo $\mathcal{R}$ il limite:

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} f(x_k, y_h) \cdot \mathrm{area}(I_k \times J_h)$$

Se gli intervallini $I_k$ e $J_h$ sono tutti uguali, l'espressione di sopra diventa:

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} f(x_k, y_h) \frac{(b-a)(d-c)}{nm}$$

Per definire l'integrale doppio esteso ad un insieme $E$ limitato che non è un rettangolo, si procede come segue. Sia $\mathcal{R}$ un rettangolo contenente $E$ al suo interno; allora si pone

$$\int\int_{E} f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{R}} f^*(x,y)dxdy$$

ove $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathcal{R} - E \end{cases}$

Si chiama *dominio normale rispetto all'asse* $x$ un insieme del tipo $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b},\ \alpha(\mathrm{x}) \le \mathrm{y} \le \beta(\mathrm{x})\}$, dove $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono due funzioni di $x$.

Si chiama *dominio normale rispetto all'asse y* un insieme del tipo $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{a} \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{b},\ \alpha(\mathrm{y}) \leq \mathrm{x} \leq \beta(\mathrm{y})\}$, dove $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ sono due funzioni di $y$.
Per calcolare l'integrale doppio di $f(x,y)$ esteso ad un dominio $E$ normale rispetto all'asse $x$, si procede come segue:

$$\int\int_E f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right)$$

in cui si calcola prima l'integrale interno tra ( ), il cui risultato risulta una funzione di $x$, e poi si calcola l'integrale esterno, integrando in $dx$.
Per calcolare l'integrale doppio di $f(x,y)$ esteso ad un dominio $F$ normale rispetto all'asse $y$, si procede come segue:

$$\int\int_F f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right)$$

in cui si calcola prima l'integrale interno tra ( ), il cui risultato risulta una funzione di $y$, e poi si calcola l'integrale esterno, integrando in $dy$.
Se $E$ si può scrivere sia come dominio normale rispetto all'asse $x$, che come dominio normale rispetto all'asse $y$, l'integrale doppio si calcola indifferentemente in uno dei due modi, pervenendo allo stesso risultato, grazie al Teorema di Fubini.
Se l'insieme $E$ si può scrivere come unione di più insiemi, l'integrale doppio di $f(x,y)$ esteso ad $E$ risulta essere la somma degli integrali doppi estesi agli insiemi la cui unione è $E$ (additività dell'integrale doppio).
L' integrale doppio esteso ad $E$ di una combinazione lineare di funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ risulta essere la combinazione lineare degli integrali doppi (linearità dell'integrale doppio).
Il significato geometrico dell'integrale doppio di $f(x,y)$ esteso ad $E$ è il volume della parte di spazio compresa sotto al grafico (superficie) della funzione $f(x,y)$ ed individuata dall'insieme $E$. Se $f(x,y) = 1$, si ottiene $\int\int_E dxdy = \text{area}(E)$.

---

▷ **Esercizio 16.1**
Calcolare l'integrale doppio esteso all' insieme a fianco indicato:
**1.** $\int\int_E x^3y\ dxdy,\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \mathrm{x} \leq 1;\ -1 \leq \mathrm{y} \leq 0\}$;
**2.** $\int\int_E \sin x \cos y\ dxdy,\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \mathrm{x} \leq \pi;\ 0 \leq \mathrm{y} \leq \pi\}$;
**3.** $\int\int_E x\sqrt{1+y^2}\ dxdy,\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \mathrm{x} \leq 1;\ 0 \leq \mathrm{y} \leq 3\}$;
**4.** $\int\int_E \frac{1}{1-x-y+xy}\ dxdy,\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq \frac{1}{2};\ 0 \leq \mathrm{y} \leq \frac{1}{2}\}$;

**5.** $\int\int_E \sin(x+y)\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0\le \mathrm{x}\le \frac{\pi}{2};\ 0\le \mathrm{y}\le \mathrm{x}\};$
**6.** $\int\int_E xy\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : -1\le \mathrm{x}\le 0;\ -\mathrm{x}^2\le \mathrm{y}<1+\mathrm{x}\};$
**7.** $\int\int_E (x-1)y\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 1\le |\mathrm{x}|+|\mathrm{y}|\le 2\}.$

▷ **Esercizio 16.2**
Per $\alpha>0$, calcolare l'area dell'insieme
$E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0\le \mathrm{x}\le 1;\ 0\le \mathrm{y}\le 1;\ \mathrm{xy}\le \alpha\}.$

▷ **Esercizio 16.3**
Calcolare l'integrale doppio esteso all' insieme a fianco indicato:
**1.** $\int\int_E x^\alpha\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0\le \mathrm{x}\le 2\pi;\ \sin\mathrm{x}\le \mathrm{y}\le 1+\sin\mathrm{x}\},\ \alpha>0;$
**2.** $\int\int_E e^{-(x-y)}\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \mathrm{x}\ge 0;\ \mathrm{y}\ge \alpha\mathrm{x},\ \mathrm{y}\le 2-2\alpha\mathrm{x}\},\ \alpha>0;$
**3.** $\int\int_E xy\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0\le \mathrm{y}\le 2\pi; -1+\cos\mathrm{x}\le \mathrm{x}\le 1-\cos\mathrm{y}\};$

▷ **Esercizio 16.4**
Trovare il baricentro del triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},1)$.

▷ **Esercizio 16.5**
Calcolare $\int\int_{x^2+y2\le 3}\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$

▷ **Esercizio 16.6**
Calcolare $\int\int_E 2xy\ dxdy,\ E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le 9; \mathrm{y}\ge \mathrm{x}, \mathrm{x}\le 0\}$

▷ **Esercizio 16.7**
Provare che per ogni $f(x,y)$ integrabile sul quadrato unitario, risulta
$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

▷ **Esercizio 16.8**
Calcolare l'area di $F=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : -1<\mathrm{x}<2; \mathrm{x}^2<\mathrm{y}<\mathrm{x}+2\}$

▷ **Esercizio 16.9**
Calcolare l'area dei seguenti domini:
$E=\{9<x^2+y^2<8y\},\ F=\{0<y<8;\ \frac{y^2}{4}<x<2y\},$
$G=\{(x^2+y^2)^3<16x^2\}$

▷ **Esercizio 16.10**
Calcolare
$$\int_0^4 dx\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$$

▷ **Esercizio 16.11**
Calcolare $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)^{-1/2}dy$

▷ **Esercizio 16.12**
Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

▷ **Esercizio 16.13**
Calcolare $\int\int_E (x-2)^2 dxdy,\ E=\{|x|\leq 2,\ |y|\leq 2,\ x^2+y^2\geq 1\}$

▷ **Esercizio 16.14**
Calcolare $\int\int_E \frac{1}{x} dxdy,\ E=\{1\leq x^2+y^2\leq 4,\ -x\leq y\leq x\}$

▷ **Esercizio 16.15**
Calcolare l'area racchiusa dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

▷ **Esercizio 16.16**
Calcolare $\int\int_E xe^y dxdy$, ove $E$ è il triangolo formato dalla retta di equazione $y=-x+1$ e gli assi coordinati.

▷ **Esercizio 16.17**
Calcolare $\int\int_A x(y+\sin\pi y)dxdy$, ove $A$ è la figura piana la cui frontiera percorsa in verso orario è formata dal grafico di $y=2\sqrt{x}$, per $0\leq x\leq 1$; dal segmento di retta $y=-x+3$, per $1\leq x\leq 2$; dal segmento di retta $y=x-1$ per $0\leq x\leq 2$; dal segmento $0\leq x\leq 1$ dell'asse $x$.

▷ **Esercizio 16.18**
Calcolare $\int\int_A (1+x+y)^{-2}dxdy$, ove $A$ è l'insieme dell' Esercizio 16.17

▷ **Esercizio 16.19**
Calcolare area e baricentro di $B$, ove $B$ è delimitato dalla parabola di equazione $y=x^2$ e dalla retta $y=1$.

▷ **Esercizio 16.20**
Calcolare $\int\int_C e^{x+y}dxdy$, ove $C=[0,\pi/2]\times[0,\pi]$.

▷ **Esercizio 16.21**
Calcolare $\int\int_D (x^2+y)dxdy$, ove $D$ è la parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y=-x^2+1$ e dall'asse delle $x$.

▷ **Esercizio 16.22**
Se $G=\{x^2+y^2/4\leq 2;\ y\geq 2x\}$, calcolare l'area di $G$ e $\int\int_G x^3 ydxdy$. Calcolare inoltre $\int\int_G |y|dxdy$.

# Capitolo 32

# Soluzione degli esercizi del Capitolo 16

▷ **Esercizio 16.1**

**1.** $I = \int_0^1 x^3 dx \int_{-1}^0 y dy = \int_0^1 x^3 dx [y^2/2]_{-1}^0 = \ldots = -\frac{1}{8}$ .

**2.** $I = \int_0^\pi \sin x dx \int_0^\pi \cos y dy = \int_0 \pi \sin x dx [\sin y]_0^\pi = 0.$

**3.** $I = \int_{-1}^1 x dx \int_0^3 \sqrt{1+y^2} dy$. Ricordiamo che $\int \sqrt{1+y^2} dy = \frac{y}{2}\sqrt{1+y^2} + \frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})+C$, dunque $I = [x^2/2]_{-1}^1 \cdot [\frac{y}{2}\sqrt{1+y^2}+\frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})]_0^3 = \frac{1}{2}(3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10}).$

**4.** La funzione integranda si può scrivere $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, pertanto

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x} \int_0^{1/2} \frac{1}{1-y} dy = \ldots = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

**5.** $I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x dy \sin(x+y) = -\int_0^{\pi/2} dx [\cos(x+y)]_{y=0}^{y=x} +$

$$-\int_0^{\pi/2} dx(\cos 2x - \cos x) = \ldots = 1.$$

**6.** $I = \int_{-1}^0 x dx \int_{-x^2}^{1+x} y dy = \int_{-1}^0 x dx [y^2/2]_{-x^2}^{1+x} = \ldots = \frac{1}{24}$ .

**7.** L'insieme $E$ è la cornice racchiusa tra il quadrato $Q$ di vertici $(2,0),\ (0,2),\ (-2,0),\ (0,-2)$ e il quadrato $Q'$ di vertici $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$. Quindi $I = \int\int_Q f(x,y)dxdy - \int\int_{Q'} f(x,y)dxdy$. Ora $\int\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^2 y dy \int_{y-2}^{2-y}(x-1)dx + \int_{-2}^0 y dy \int_{-y-2}^{y+2}(x-1)dx = \ldots = -8$; l'altro integrale $\int\int_{Q'} f(x,y)dxdy = \int_0^1 y dy \int_{y-1}^{1-y}(x-1)dx$ si calcola in maniera analoga.

▷ **Esercizio 16.2**

l'iperbole di equazione $xy = \alpha$ interseca la retta $y = 1$ nel punto $(\alpha, 1)$. L'insieme $E$ è quindi l'unione del rettangolo di base $\alpha$ e altezza 1 con il sottografico di $y = \alpha/x$ per $x \in (\alpha, 1)$. Pertanto, l'area di $E$ è uguale a $\alpha + \int_\alpha^1 \alpha dx/x = \ldots = \alpha(1 - \ln\alpha)$.

▷ **Esercizio 16.3**
**1.** $I = \int_0^{2\pi} x^\alpha dx \int_{\sin x}^{1+\sin x} dy = \int_0^{2\pi} x^\alpha dx = (2\pi)^{\alpha+1}/(\alpha+1)$.
**2** $I = \int_0^{2/3\alpha} e^{-x} dx \int_{\alpha x}^{2-2\alpha x} e^y dy = \dots$
**3.** $I = \int_0^{2\pi} y dy \int_{-1+\cos y}^{1-\cos y} x dx = \dots = 0$.

▷ **Esercizio 16.4**
Le coordinate del baricentro di un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ sono:

$$x_c = \frac{\int\int_E x\ dxdy}{\text{area}(E)},\ y_c = \frac{\int\int_E y\ dxdy}{\text{area}(E)}$$

Se $E$ è il triangolo dato, si può scrivere $E = \{0 \le y \le 1,\ y/2 \le x \le -y/2+1\}$ con area$(E) = 1/2$. Si ha quindi: $\int\int_E xdxdy = \int_0^1 dy \int_{y/2}^{-y/2+1} xdx = \dots$ e $\int\int_E ydxdy = \int_0^1 ydy \int_{y/2}^{-y/2+1} dx = \dots$

▷ **Esercizio 16.5**
Passando a coordinate polari piane centrate in $(0,0)$ : $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho\rho^2 = \dots 2\pi\sqrt{3}$.

▷ **Esercizio 16.6**
$I = \int_{\pi/2}^{5\pi/4} d\theta \int_0^3 2\rho^3 \cos\theta \sin\theta = \dots - \frac{81}{8}$.

▷ **Esercizio 16.7**
Il primo è l'integrale doppio di $f(x,y)$ esteso al triangolo $T = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ che si può anche scrivere (come dominio normale rispetto all'asse $y$) $T = \{0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$. Da ciò segue il risultato.

▷ **Esercizio 16.8**
area$(F) = \int\int_F dxdy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = \int_{-1}^2 (x+2-x^2)dx = \dots \frac{9}{2}$ .

▷ **Esercizio 16.9**
Si ha $E = \{(\rho,\theta) : 3 \le \rho \le 8\cos\theta\}$ per cui area$(E) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_3^{8\cos\theta} \rho d\rho = \dots = 23\pi$.
area$(F) = \int_0^8 dy \int_{y^2/4}^{2y} dx = \dots \frac{64}{3}$ .
Si ha $G = \{(\rho,\theta) : \rho < 2\sqrt{\cos\theta}\}$ per cui area$(G) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\sqrt{\cos\theta}} \rho d\rho = \dots 1$.

▷ **Esercizio 16.10**
L'insieme di integrazione è il cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2. Pertanto, passando a coordinate polari centrate in $(0,0)$, esso si rappresenta come

$\{(\rho, \theta) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta\}$. Si ottiene quindi
$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho = \ldots = 4\pi$.

▷ **Esercizio 16.11**
$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} (x^2 + y^2)^{-1/2} dy = \ldots$

▷ **Esercizio 16.12**
Passando a coordinate polari centrate in $(0, 0)$ si ottiene
$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \int_0^{2\pi} [-e^{-\rho^2}/2]_0^{+\infty} = \ldots = \pi$.

▷ **Esercizio 16.13**
L'insieme di integrazione è la parte di piano interna al quadrato $Q$ di lato 4 con centro nell'origine ed esterna al cerchio con centro l'origine e raggio 1. Quindi
$I = \int_{-2}^{2} (x-2)^2 dx \int_{-2}^{2} dy - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho (\rho\cos\theta - 2)^2 = \ldots = \frac{256}{3} - \frac{17\pi}{4}$ .

▷ **Esercizio 16.14**
L'insieme di integrazione è un settore di corona circolare di raggi 1 e 2, precisamente si ha $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^2 \rho d\rho \frac{1}{\rho\cos\theta} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos\theta} = [-\ln|\tan(\pi/4 - x/2)|]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \ln|\tan(3\pi/8)| - \ln|\tan(-\pi/8)|$.

▷ **Esercizio 16.15**
Usando le coordinate polari ellittiche

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$$

la parte di piano racchiusa dall'ellisse si scrive come $\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho < 1,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$.
La matrice Jacobiana associata alla trasformazione inversa è

$$J = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

con $detJ = ab\rho$. Pertanto, l'area dell'ellisse è $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ab\rho = \pi ab$. Nel caso del cerchio (ovvero per $a = b = r$) si riottiene la nota formula $A = \pi r^2$.

▷ **Esercizio 16.16**
$I = \int_0^1 x dx \int_0^{-x+1} e^y dy = \ldots = e - \frac{5}{2}$ .

▷ **Esercizio 16.17**
$I = \int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy\ x(y + \sin\pi y) + \int_1^2 dx \int_{x-1}^{3-x} dy\ x(y + \sin\pi y) = \ldots$

▷ **Esercizio 16.18**
$I = \int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy\ (1+x+y)^{-2} + \int_1^2 dx \int_{x-1}^{3-x} dy\ (1+x+y)^{-2}) = \ldots$

▷ **Esercizio 16.19**
L'area di $B$ è uguale a $2 - 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{4}{3}$ ; l'ascissa $x_c$ del baricentro di $B$ è ovviamente 0 per motivi di simmetria, mentre $y_c = \int\int_B y dy/(4/3) = \frac{3}{4}\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy = \ldots = \frac{3}{5}$ .

▷ **Esercizio 16.20**
$I = \int_0^{\pi/2} e^x dx \int_0^\pi e^y dy = \left(\int_0^{\pi/2} e^x dx\right)\left(\int_0^\pi e^y dy\right) = (e^\pi - 1)(e^{\pi/2} - 1).$

▷ **Esercizio 16.21**
$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{-x^2+1} (x^2 + y) dy = \int_{-1}^1 dx [x^2 y + y^2/2]_0^{-x^2+1} = \ldots$

▷ **Esercizio 16.22**
L'equazione dell'ellisse $x^2 + y^2/4 = 2$ si riduce in forma canonica dividendo entrambi i membri per 2, ovvero $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. L'insieme $G$ è costituito dalla parte di ellisse sopra la retta $y = 2x$; questa interseca l'ellisse nei punti di ascissa $x = \pm 1$. Pertanto, passando a coordinate polari ellittiche (v. Esercizio 16.15), si può scrivere $G = \{0 \le \rho \le 1,\ \pi/4 \le \theta \le 5\pi/4\}$. Quindi, l'area di $G$ è uguale a $\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_0^1 ab\rho = \frac{\pi ab}{2}$ . Sostituendo $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{8}$, si ottiene area$(G) = 2\pi$.
Risulta poi $\int\int_G x^3 y dx dy = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_0^1 ab\rho^5 \cos^3\theta \rho \sin\theta d\rho =$
$= 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^3\theta \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho = \ldots 0.$
Infine $\int\int_G |y| dx dy = 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_0^1 \rho d\rho |\rho \sin\theta| = \frac{4}{3}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} |\sin\theta| d\theta =$
$= \frac{4}{3}\int_{\pi/4}^{\pi} \sin\theta d\theta - \frac{4}{3}\int_{\pi}^{5\pi/4} \sin\theta d\theta = \ldots \frac{8}{3}$ .