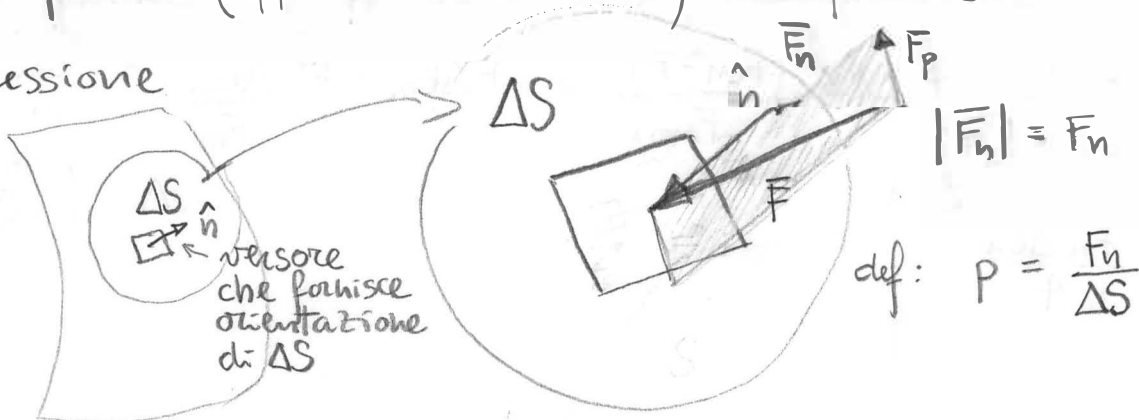


		forma propria	volume proprio
○ fluidi	{ liquidi	NO	SI
	{ gas	NO	NO

Noi ora studieremo i liquidi, che hanno volume proprio e sono quindi (approssimativamente) incompressibili.

○ pressione



unità SI : $\frac{N}{m^2} = Pa$

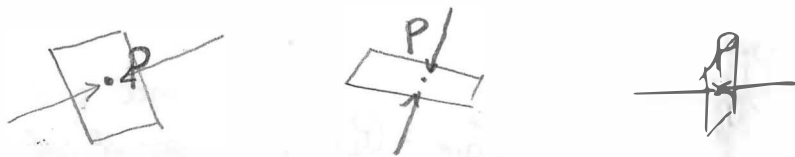
cgs : $\frac{dyne}{cm^2} = \text{barie} = 0,1 Pa$

varie $\left\{ \begin{array}{l} 1 atm = 101300 Pa = 760 mmHg = 760 Torr \\ 1 bar = 10^6 barie = 10^5 Pa \cong 1 atm \\ 1 mbar = 10^3 barie \end{array} \right.$

○ fluido statica : il fluido è in equilibrio
ogni volumetto del fluido è in equilibrio

⇒ sulla superficie limite di un fluido non ci sono forze tangenti (ma solo normali)

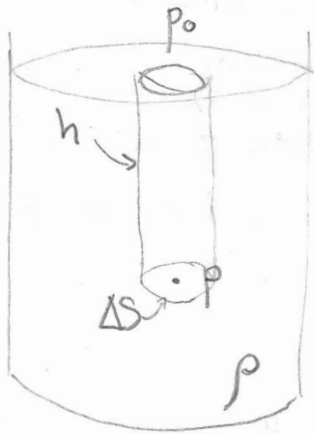
⇒ vale principio di isotropia della pressione: la pressione che si esercita su ΔS non dipende dall'orientazione di ΔS



si parla quindi di pressione in un punto

⇒ vale principio di Pascal: una variazione di pressione sulla superficie limite di un fluido chiuso si trasmette inalterata in ogni punto del fluido.

⊙ Legge di Stevino (pressione idrostatica)



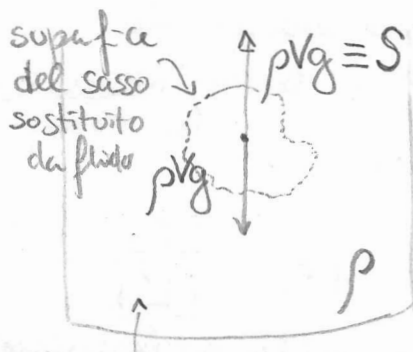
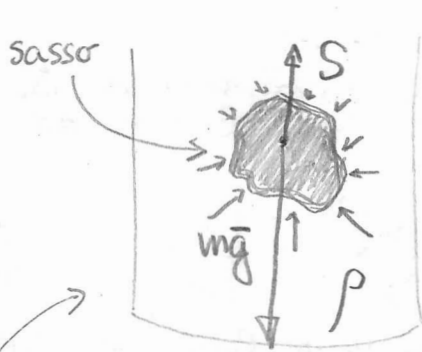
$$p = p_0 + \text{pressione dovuta al fluido sovrastante}$$

$$= p_0 + \frac{\rho V g}{\Delta S}$$

$$= p_0 + \rho \frac{\Delta S \cdot h \cdot g}{\Delta S}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

⊙ Principio di Archimede (← vedi pag. 21)

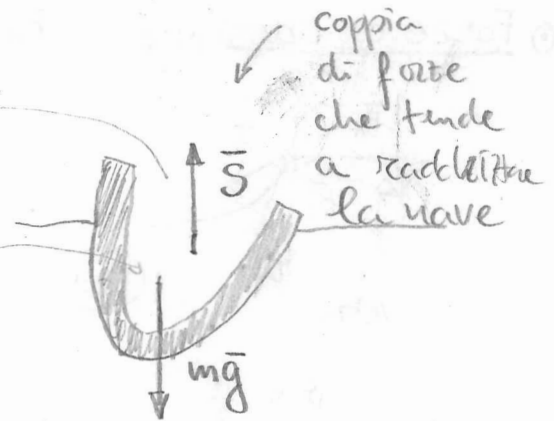
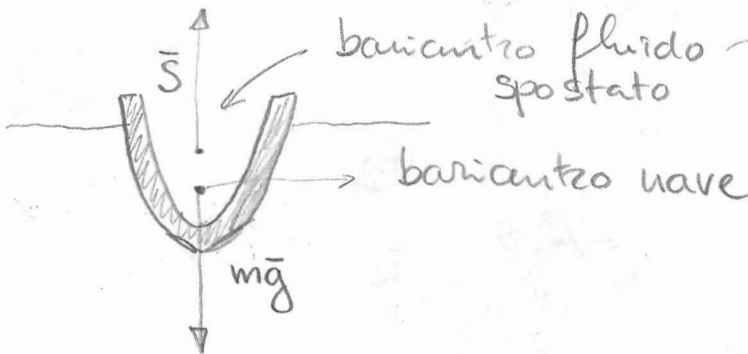


← agisce sul baricentro del fluido spostato

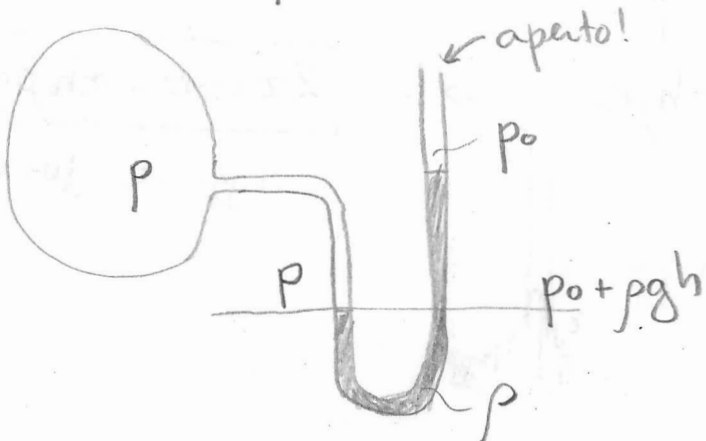
\vec{S} è la risultante delle forze dovute alle pressioni

Si stima \vec{S} con un esperimento ideale...

Esempio



⊙ Misura della pressione con manometro aperto (tubo a U)

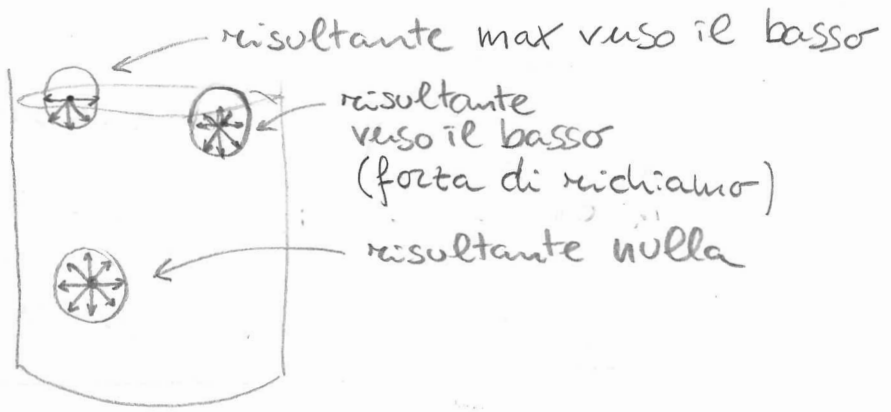


$$p = p_0 + \rho g h$$

(+ esperienza Torricelli)

Tensione superficiale

① Forze di coesione F_c hanno un certo raggio d'azione:



I liquidi tendono spontaneamente a minimizzare la superficie libera. Aumentare la superficie libera costa lavoro contro forze di richiamo. Definisco

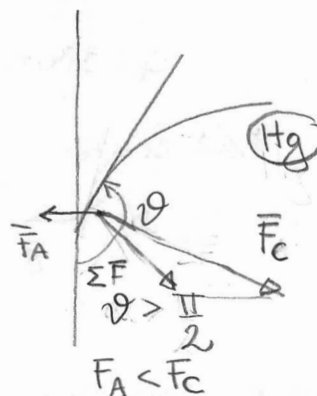
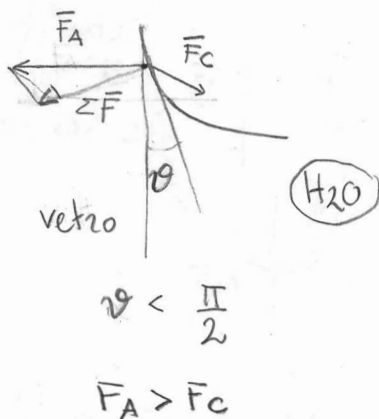
tensione superficiale

$$\tau = \frac{L}{\Delta S} \leftarrow \text{lavoro necessario per aumentare di } \Delta S \text{ la superficie libera del liquido}$$

dimensioni $[\tau] = \frac{[L]}{[L^2]} = \frac{[F][L]}{[L^2]} = \frac{[F]}{[L]} \quad \frac{N}{m}$

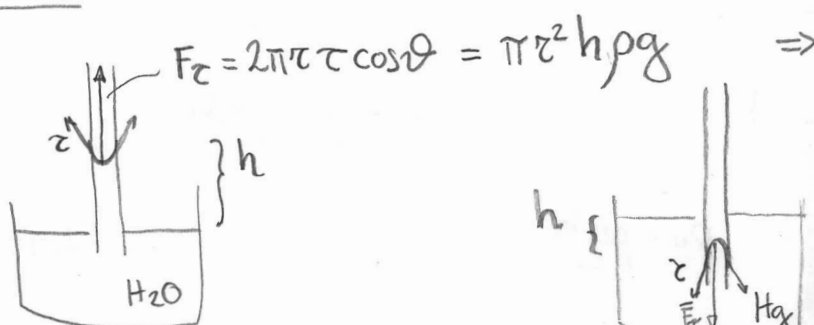
τ è una F per unità di lunghezza su una lamina liquida
 τ diminuisce - al crescere della temperatura
 - in presenza di tensioattivi

② Forze di adesione F_A può essere $\geq F_c$



$\theta = \text{angolo di contatto}$

③ Capillari



$$2\tau \cos\theta = r h \rho g$$

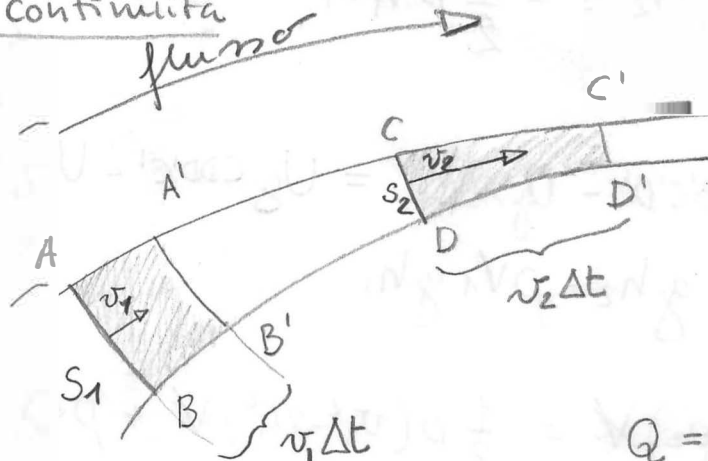
Legge di Jurin

- DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

fluido ideale $\left\{ \begin{array}{l} \text{incomprimibile} \\ \text{non viscoso} \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \rho = \text{cost} \\ \text{no attrito} \end{array} \right)$

che si muove con flusso $\left\{ \begin{array}{l} \text{stazionario} \\ \text{irrotazionale} \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{in ciascun punto} \\ v \text{ costante nel tempo} \\ \text{(un mulinello non gira)} \end{array} \right)$

Equazione di continuità



$$Q = \frac{Sv\Delta t}{\Delta t} = Sv$$

(portata, $\frac{m^3}{s}$)

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

$$Q_{AB} = Q_{CD}$$

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

Q deve essere costante perché il flusso è stazionario

(il volume che attraversa AB in Δt deve essere lo stesso che attraversa CD in Δt)

Teorema di Bernoulli

Considero il fluido in ABCD. Dopo Δt si trova in A'B'C'D'.
Applico a questo moto:

$$L = \Delta K$$

$$L_p + L_g = \Delta K$$

$$L_p = \Delta K + \Delta U_g$$

L_p = lavoro ^{fatto} sul fluido dalle forze dovute alla pressione

L_g = lavoro fatto sul fluido dalla gravità = $-\Delta U_g$

Calcolo i tre termini, uno alla volta

$$\begin{aligned} L_p &= F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = \\ &= p_1 S_1 \cdot v_1 \Delta t - p_2 S_2 \cdot v_2 \Delta t \\ &= (p_1 - p_2) S_1 v_1 \Delta t \end{aligned}$$

Per valutare ΔK e ΔU_g , ricordo che il flusso è stazionario.
 Pertanto le differenze tra stato finale ed iniziale sono dovute esclusivamente alla sostituzione di ABCD con A'B'C'D',
 equivalente alla sostituzione di ABB'A' con CDD'C'

$$\Delta K = K_{A'B'C'D'} - K_{ABCD} = K_{CDD'C'} - K_{ABB'A'}$$

$$= \frac{1}{2} \rho V_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V_1 v_1^2 \quad \text{con } V_1 = S_1 v_1 \Delta t$$

$$V_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

$$\text{e } v_1 = v_2 = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{S_2 v_2 \Delta t} = v$$

$$\Delta U_g = U_{g, A'B'C'D'} - U_{g, ABCD} = U_{g, CDD'C'} - U_{g, ABB'A'}$$

$$= \rho V_2 g h_2 - \rho V_1 g h_1$$

Quindi: $(p_1 - p_2) V = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) V + \rho g (h_2 - h_1) V$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{cost.}$$

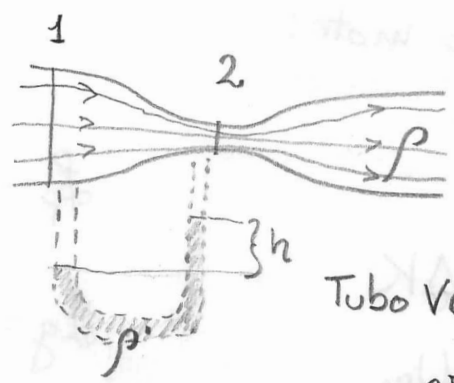
↑ densità di en. cinetica
 ↑ densità di en. pot. gravitazionale
 ↑ densità di energia dovuta alla pressione

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Applicazioni

→ Effetto Venturi

(stenosi - aneurisma)



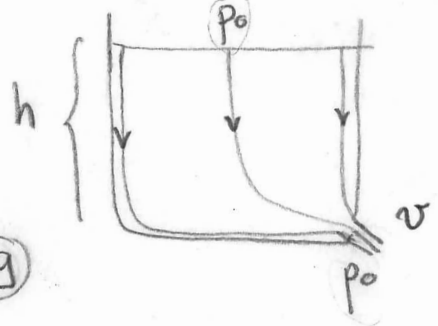
$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} > v_1$$

$$p_2 < p_1$$

Tubo Venturi:

$$v_1^2 = \frac{2 \rho' g h}{\rho \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)} = C \cdot h$$

→ Teorema Torricelli



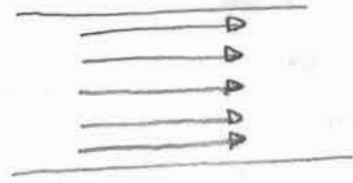
$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Fluidi "reali"

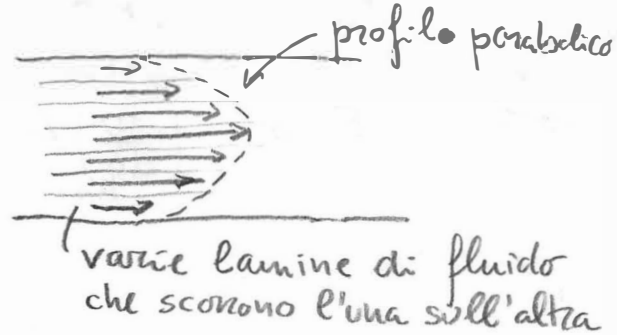
Finora abbiamo studiato i fluidi ideali, in particolare

- no attrito ($\eta = 0$)
- moto stationario
- la velocità è la stessa su tutta la sezione della condotta



In una migliore approssimazione di un fluido reale, supponiamo ora

- attrito ($\eta \neq 0$)
- moto stationario
- moto laminare con velocità massima al centro e decrescente verso le parti della condotta



Questa approssimazione è ragionevole a bassa velocità. Per fluidi che si muovono a velocità elevate si hanno turbolenze. (moto turbolento).

Legge di Poiseuille

Per un fluido "reale" in moto stationario, laminare e non turbolento, si ha:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}$$



$\frac{dp}{dl}$, gradiente di pressione

si ricordi

$$[\eta] = [M][L^{-1}][t^{-1}]$$

vedi pag. 20 ←

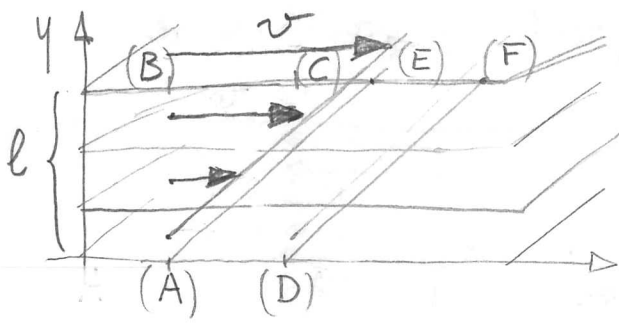
← Δp
differenza di pressione dovuta all'attrito
(necessaria per compensarlo)

Per la velocità media v_m vale ancora $Q = S v_m$
La legge di Poiseuille vale finché $v_m < v_c$ (velocità critica)

$$v_c = N_R \frac{\eta}{\rho r}$$

con N_R = numero di Reynolds
adimensionale
in questo contesto $N_R \sim 1200$

Definizione di viscosità



lamine piane di liquido che scorrono l'una sull'altra
 $A = \text{area delle lamine}$

AD fermo
 BC v risp. AD

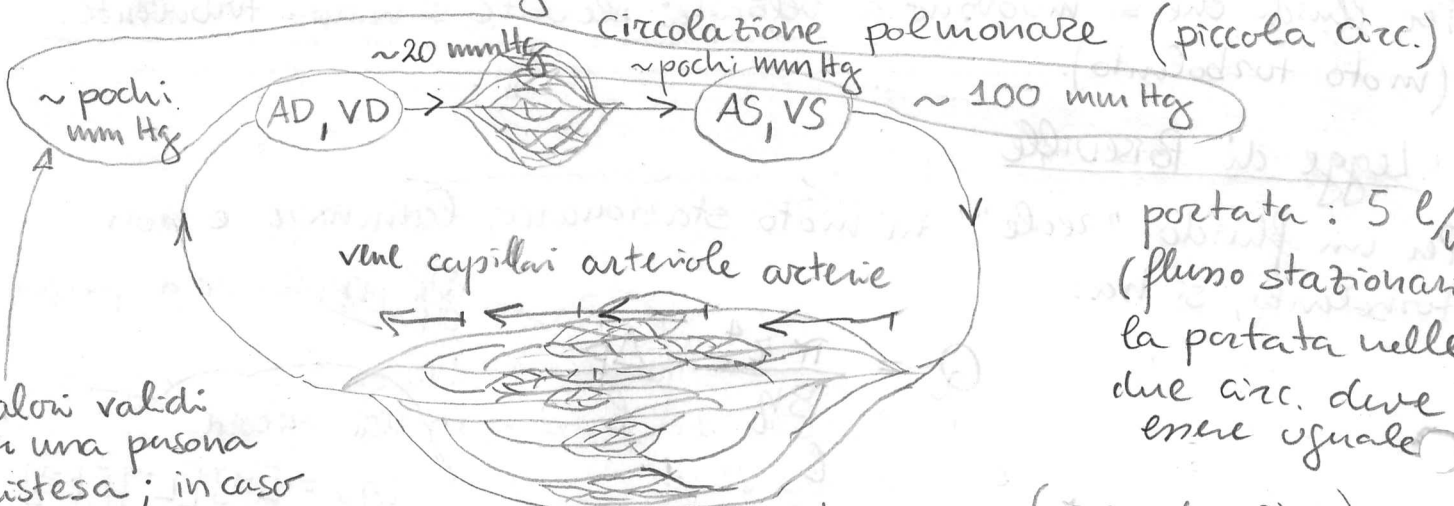
ipotesi:
 $\frac{dv}{dy} = \text{cost} = \frac{v}{l}$

altra ipotesi: $F \propto \left(\frac{dv}{dy}\right) A$ (proporzionale)

In effetti: $F = \eta \left(\frac{dv}{dy}\right) A$

Nel caso specifico: $\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{l}$

Circolazione del sangue



carico di scivolamento

portata: 5 l/min
 (flusso stazionario)
 la portata nelle due circ. deve essere uguale

valori validi per una persona distesa; in caso contrario conta anche ρgh , parzialmente neutralizzato dall'azione di valvole venose

La perdita di pressione è dovuta alla resistenza dei vasi sanguigni; da Poiseuille:

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4} Q$$

\downarrow
R

analogia con legge Ohm*

$$\Delta V = RI$$

\downarrow \downarrow
 Δp Q

Resistente in serie $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$

in parallelo $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$

questa analogia venā introdotta a fine corso

Ad esempio il letto arteriolare è fatto da N_a arteriole

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{N_a}}$$

se $\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_2} \approx \dots \approx \frac{1}{R_{N_a}} \equiv \frac{1}{R_a}$ allora ho N_a addendi uguali a $\frac{1}{R_a}$

$$= N_a \cdot \frac{1}{R_a} = \frac{N_a}{R_a} \quad \text{Quindi } R_{eq} = \frac{R_a}{N_a}$$

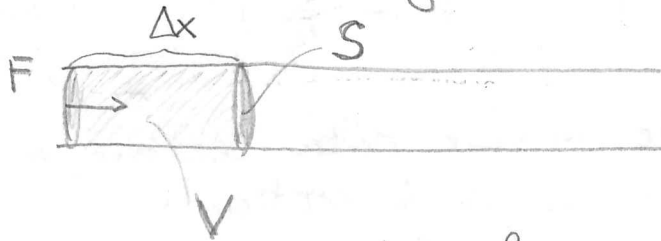
Allo stesso modo per il letto capillare (fatto da N_c capillari):

$$R_{eq} = \frac{R_c}{N_c}$$

Lavoro e potenza cardiaca

Consideriamo per ora solo il ventricolo sinistro (il v. dx contribuisce con un ulteriore 20% in più).

Modello super-semplificato: in 1 contrazione il v. sx immette nell'aorta un volume di sangue V , che sposta il sangue



presente di Δx , con $V = S \cdot \Delta x$; $L = F \cdot \Delta x = p \cdot S \cdot \Delta x = pV$

Come nella dimostrazione del teorema di Bernoulli (pag. 33), bisognerebbe sottrarre il lavoro all'altro estremo della grande circolazione, ma il sangue rientra nell'atrio dx a $p \sim 0$ e quindi anche questo lavoro è nullo. Quindi

$$\left. \begin{array}{l} \text{v. sx} \rightarrow L = pV \\ \text{v. dx} \rightarrow L' = p'V \end{array} \right\} L_{TOT} = (p + p')V$$

Sostituendo:

$$\begin{array}{l} p \sim 100 \text{ Torr} \\ p' \sim 20 \text{ Torr} \\ V \sim 60 \text{ cm}^3 \\ 1 \text{ pulsazione/s} \end{array} \quad \begin{array}{l} L_{TOT} \sim 1 \text{ J} \\ P \sim 1 \text{ W} \end{array}$$

Modello più accurato: (vedi libro)

- suddivide la contrazione in 4 fasi, ma solo 1 contribuisce a L , come sopra. L viene fatto in tempo 3 volte minore $\Rightarrow P \times 3$
- una fase di contrazione isometrica comporta lavoro interno (calore) (42)

c'è un ulteriore contributo dovuto alla velocità con cui il sangue si muove v o v^2 (fattore cinetico).

In situazioni non-paolo - cre è trascurabile

- il rendimento del cuore è circa il 10%

In conclusione il cuore dissipa circa 200 kcal al giorno

Viscosità del sangue

Il sangue non rispetta esattamente la legge di Poiseuille (per tanto ^{si dice che} non è un liquido newtoniano). Molte delle anomalie del suo comportamento possono essere spiegate dal fatto che contiene eritrociti e molecole proteiche di dimensioni non trascurabili. Ad esempio

→ la viscosità del sangue cresce rapidamente con il valore di ematocrito (% volume eritrociti)

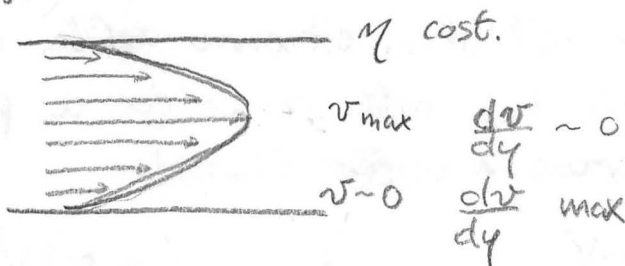
→ η assume valori piccoli nei capillari di raggio r piccolo:

$$\eta(r) = \frac{\eta_{00}}{\left(1 + \frac{d}{r}\right)^2}$$

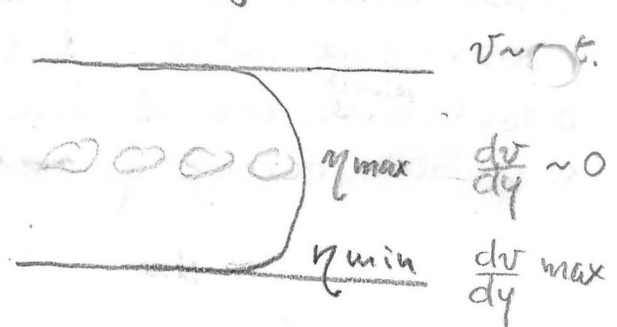
η per r grandi
diametro eritrociti (6-9 μm)

→ η non è costante in una data sezione, a causa dell'accumulo assiale degli eritrociti

fluido "reale"



sangue

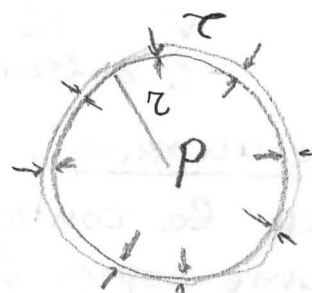


l'accumulo assiale (si veda a pag. 41)

gli eritrociti diminuisce l'attivo $\sim \eta \left(\frac{dv}{dy}\right)$

Legge di Laplace

Si considera una bolla di raggio r (lamina sferica di liquido)



$$P = \frac{4\tau}{r}$$

43) Relazione tra tensione sup τ e sovrappressione P dentro alla bolla

Dimostrazione

Immagino che la bolla aumenti il suo raggio di Δr .

Per la def. di τ (pag. 37) questo costa un lavoro

$$L = \tau \cdot [4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2] \times 2$$

← perché ci sono 2 superfici
limite, una esterna ed
una interna

$$\stackrel{!}{=} \tau \cdot [4\pi r^2 + 8\pi r \Delta r + \underbrace{4\pi \Delta r^2}_{\text{trascurabile}} - 4\pi r^2] \times 2$$

$$\cong \tau \cdot 16\pi r \Delta r$$

Tale lavoro deve essere fornito dalla pressione p .

Se immaginiamo la superficie interna della bolla suddivisa in tanti elementi ΔS_i , $S = \sum_i \Delta S_i$, su ognuno agisce una forza $F_i = p \Delta S_i$ che compie un lavoro $\Delta L_i = p \Delta S_i \Delta r$,

quindi

$$L = \sum_i \Delta L_i = \sum_i p \Delta S_i \Delta r = p \Delta r \sum_i \Delta S_i = p \Delta r S$$

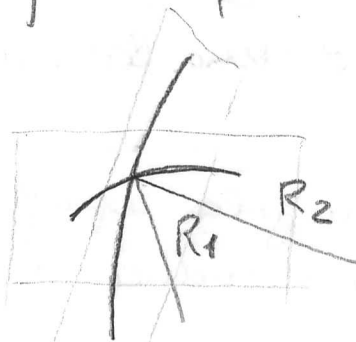
$$\stackrel{!}{=} p \Delta r 4\pi r^2$$

Uguagliando le due espressioni per L ottengo

$$p = \frac{4\tau}{r}$$

Per superfici di forma qualsiasi:

vedi * → (45)



$$p = \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Tale formula può essere usata per i vasi sanguigni:

$R_1 \rightarrow R$ raggio del vaso sanguigno

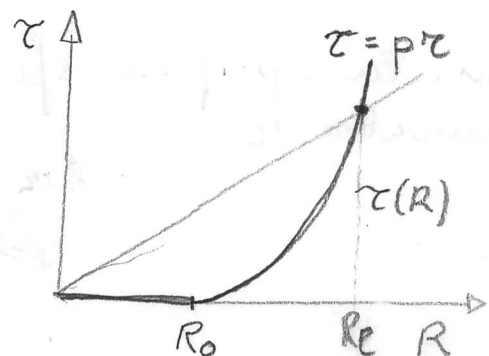
$R_2 \rightarrow \infty$ (è un cilindro)

$\tau \rightarrow \tau(R)$ tensione elastica del vaso, dipende da R

$p \rightarrow$ pressione trasmurale

$$p = \frac{\tau(R)}{R}$$

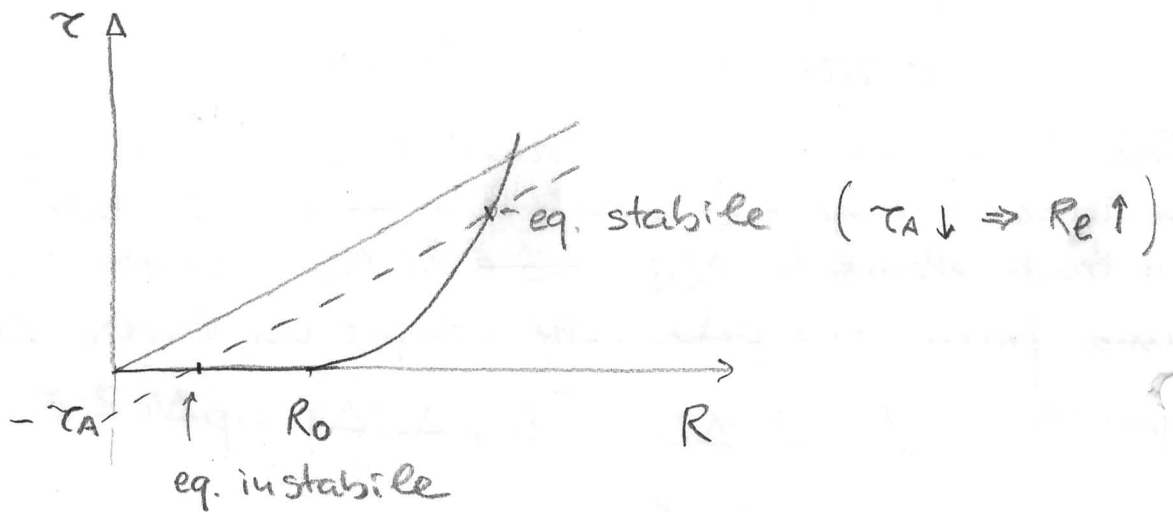
$R_e =$ raggio di equilibrio



Infine, se oltre alla tensione elastica τ ho una tensione attiva τ_A (dovuta alla contrazione della muscolatura), si ha:

$$\tau + \tau_A = pR$$

$$\tau = pR - \tau_A$$

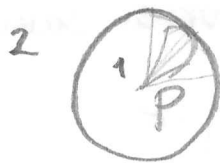


($\tau_A \downarrow \Rightarrow R_e \downarrow \Rightarrow$ rischio chiusura del vaso)

* Nota da pag. (44)

Abbiamo visto che nel caso di una lamina sferica di liquido vale $p = \frac{4\tau}{r}$.

Se invece abbiamo una singola superficie che separa il mezzo 1 dal mezzo 2, p si riduce di un fattore 2:

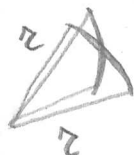


$$p = \frac{2\tau}{r}$$

Il fattore 2 può essere visto come

$$p = \frac{\tau}{r} + \frac{\tau}{r}$$

in cui la superficie sferica è caratterizzata da due raggi di curvatura r



1 gas

- Un gas è costituito da un grande numero ($\sim 10^{23}$) di atomi (σ molecole). Si può descrivere il comportamento
 - a livello microscopico \rightarrow teoria cinetica dei gas
 - a livello macroscopico \rightarrow specificando p, V, p, t
 \uparrow temperatura (in $^{\circ}\text{C}$)
- Gas perfetto: - le molecole non interagiscono (si urtano in modo perfettamente elastico)
 - sono puntiformi (occupano una frazione trascurabile del volume del contenitore)

○ Leggi dei gas perfetti (per una certa massa di gas all'equilibrio)

• t cost \Rightarrow $pV = \text{cost.}$

• gas riscaldato a p cost \Rightarrow $V(t) = V_0 (1 + \alpha t)$ (Gay-Lussac)

V_0 a 0°C

t in $^{\circ}\text{C}$

gas riscaldato a V cost \Rightarrow $p(t) = p_0 (1 + \beta t)$ (II Gay-Lussac)

Inoltre per i gas perfetti $\alpha = \beta = \frac{1}{273,15} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$,

• Eq. di stato dei gas perfetti:

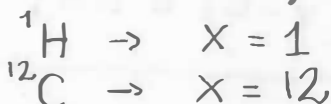
$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$$

dim: $\begin{matrix} p_0 V_0 \\ p' V \\ p, V \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow 0^{\circ} \\ \rightarrow 0^{\circ} \\ \rightarrow t \end{matrix}$ (trasf. isoterma) Boyle $p_0 V_0 = p' V$
(" isocora) I Gay-Lussac $p = p' (1 + \alpha t)$

Mettendo insieme: $pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$

○ Legge di Avogadro per i gas perfetti

mole di una sostanza \rightarrow indica la quantità di materia corrisponde a X g di una sostanza, ove X è il suo numero di massa (atomica, molecolare). Es



Una mole $\rightarrow 6,022 \cdot 10^{23}$ unità elementari (particelle) di quella sostanza.

Avogadro capì che nelle stesse condizioni di p e t , V uguali di gas perfetti diversi contengono lo stesso numero di molecole.

Inoltre a $t = 0^\circ\text{C}$, $p = 1 \text{ atm}$ $\Rightarrow V_0 = 22,41 \text{ l} = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
 Riparto allora dalla eq. di stato dei gas perfetti:

$$\begin{aligned}
 pV &= p_0 V_0 (1 + \alpha t) \\
 &= p_0 V_0 \left(\frac{273,15^\circ\text{C} + t}{273,15^\circ\text{C}} \right) \\
 &= \frac{p_0 V_0 T}{273,15 \text{ K}} \rightarrow t + 273,15^\circ\text{C} \rightarrow \text{Kelvin}
 \end{aligned}$$

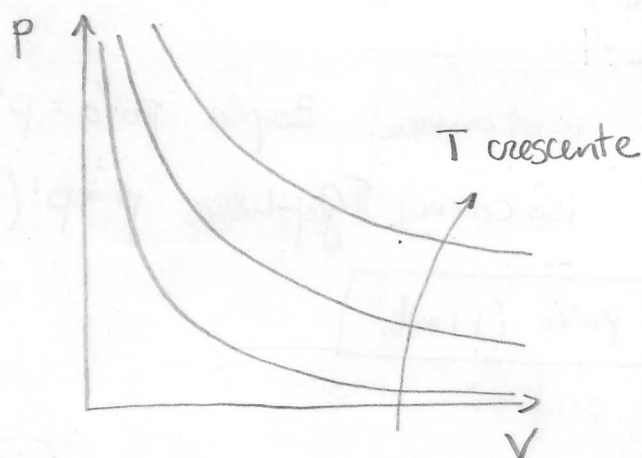
Se considero $p_0 = 1 \text{ atm} \Rightarrow \frac{p_0 V_0}{273,15 \text{ K}}$ per 1 mole $\rightarrow R$

quindi per 1 mole
 n moli

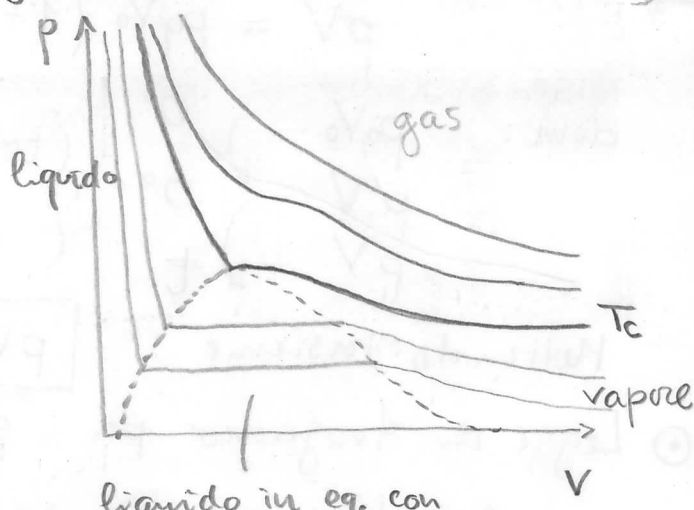
$$\begin{aligned}
 pV &= RT \\
 pV &= nRT
 \end{aligned}$$

con $R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22,41 \text{ l}}{273,15 \text{ K}} = 0,082 \frac{\text{l atm}}{\text{K mol}^{-1}}$
 $= \frac{101300 \text{ Pa} \cdot 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{273,15 \text{ K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}^{-1}}$

gas perfetto



gas reale



liquido in eq. con il vapore saturo

Eq. di stato per i gas reali (Van der Waals)
 int. tra molecole vol. proprio molecolare

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT$$