

Trasformazioni fra Sistemi di Riferimento

Prof. Raffaella Cefalo

Dipartimento di Ingegneria e Architettura - Trieste

Introduzione

- Per poter inserire i rilievi effettuati con metodologia GPS nella cartografia *locale* è necessario eseguire:
 - Trasformazioni fra Sistemi di Riferimento (*dal Sistema GPS a quello locale*)
 - Trasformazioni di coordinate (*da coordinate cartesiane geocentriche a coordinate geografiche*)

Programma

- Sistemi di Riferimento locali
- Coordinate ellissoidiche
- Definizione del Sistema di Riferimento GPS
- Trasformazioni fra sistemi di riferimento
- Trasformazioni di coordinate

Glossario

- Ellissoide

- solido biassiale di rotazione con semiasse equatoriale a e semiasse polare c

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

- schiacciamento
- eccentricità

$$\alpha = \frac{a - c}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

Glossario

– sezioni normali:

- si consideri un punto P sulla superficie e la normale all'ellissoide n ; tutti i piani passanti per n intersecano l'ellissoide secondo delle linee piane chiamate *sezioni normali*
- le sezioni normali hanno nel punto P raggi di curvatura diversi in dipendenza dell'angolo che la sezione normale forma con un piano di riferimento

Glossario

i raggi di curvatura delle sezioni normali in un punto dell'ellissoide variano con continuità da un minimo ρ ad un massimo N - *raggi principali di curvatura - raggio del meridiano e raggio della sezione normale principale (gran normale)*

$$\rho = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Sistemi locali

- I metodi tradizionali di posizionamento geodetico hanno come sistema di riferimento l'*ellissoide* per la planimetria ed il *geoide* per le quote
geoide: superficie equipotenziale normale in ogni punto al vettore di gravità
- determinazioni planimetriche: ellissoide locale
 (φ, λ)
- determinazioni altimetriche: geoide (H)

Ellissoide terrestre

- Assunto come riferimento l'ellissoide biassiale ne sono stati ricavati i parametri a e α , in base a:
 - misure geometriche (misure di archi di meridiano e parallelo), misure di gravità, studi accurati delle traiettorie dei satelliti artificiali
- Diversi geodeti hanno determinato i valori di questi parametri:

– Bessel (1841)	$a = 6377397 \text{ m}$	$\alpha = 1/299.2$
– Clarke (1880)	$a = 6378243 \text{ m}$	$\alpha = 1/293.5$
– Helmert (1906)	$a = 6378140 \text{ m}$	$\alpha = 1/298.3$
– Hayford (1909)	$a = 6378388 \text{ m}$	$\alpha = 1/297$

- Nel 1924 furono adottati universalmente quali parametri dell'ellissoide di riferimento i valori proposti da Hayford: l'ellissoide così dimensionato è da allora indicato come *ellissoide internazionale*

Coordinate ellissoidiche

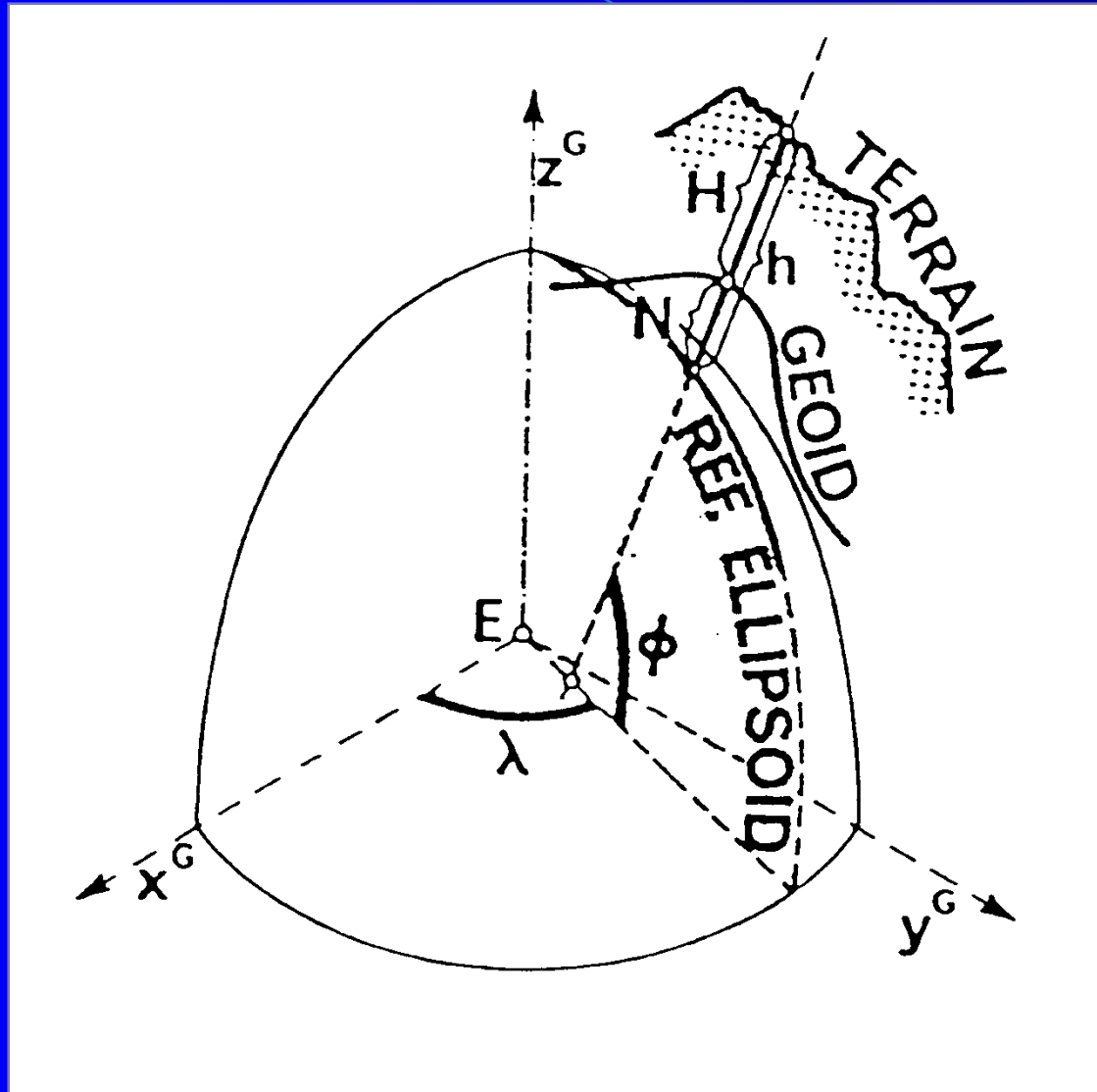
- *latitudine φ*
 - la normale n all'ellissoide in un punto P forma con la direzione dell'asse polare un angolo il cui complemento è la *latitudine ellissoidica φ* di P
- *longitudine λ*
 - il punto P determina con l'asse polare un piano che, con un altro piano di riferimento per il meridiano di Greenwich e l'asse polare, forma un diedro la cui sezione retta è la *longitudine ellissoidica λ* di P

Sistema di riferimento GPS

Sistema ECEF (Earth Centered, Earth Fixed)
geocentrico e solidale alla rotazione terrestre

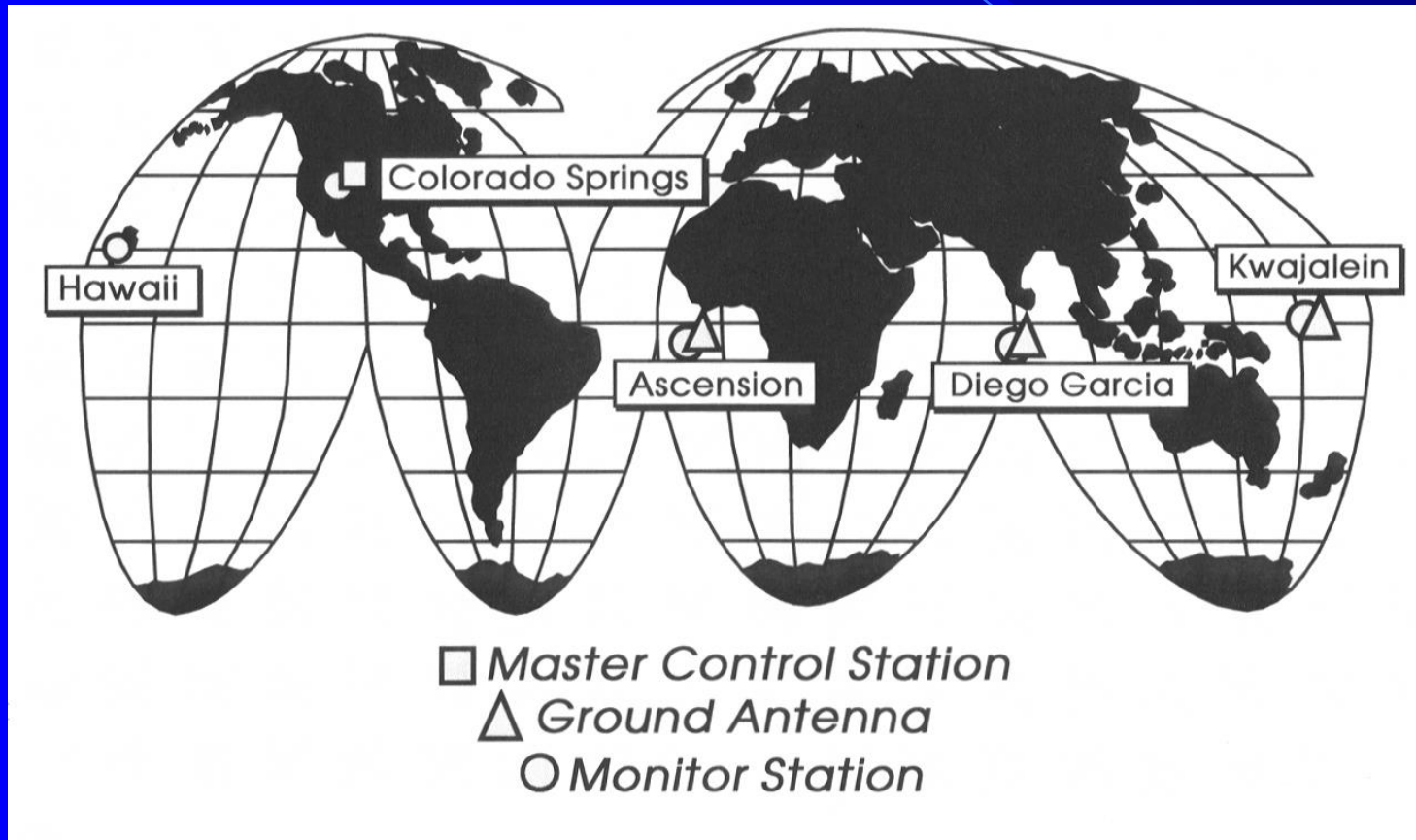
- l'origine della terna coincide con il centro di massa della Terra
- l'asse Z è parallelo alla direzione del CTP (*Polo Convenzionale Terrestre*)
- l'asse X appartiene al piano equatoriale ortogonale al CTP ed al piano per il meridiano di Greenwich
- l'asse Y completa la terna ortogonale destrorsa

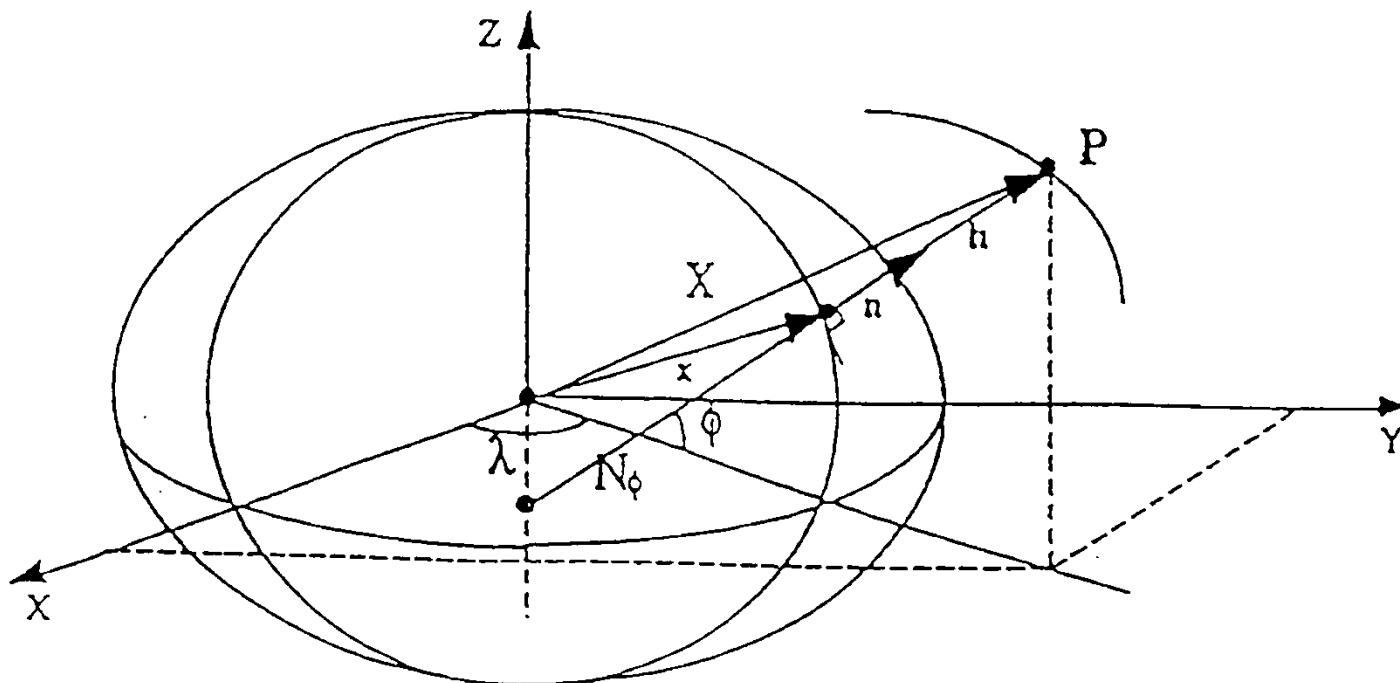
Il Sistema di riferimento ECEF



- La scelta di tale riferimento è motivata dall'utilizzo di modelli gravitazionali per il calcolo delle orbite dei satelliti (*effemeridi*) da parte delle stazioni del segmento di controllo
- WGS84 Ellissoide geocentrico associato alla terna ECEF sviluppato dalla DMA (*Defense Mapping Agency*) oggi NIMA (*National Imagery and Mapping Agency*)

Il segmento di controllo





ELLIPSOIDE WGS 84	costanti geometriche derivate
a semiasse maggiore	6378137 m
b semiasse minore	6356752.3142 m
e prima eccentricità	0.00669437999013
f schiacciamento	1/298.257223563

- Il risultato del calcolo delle posizioni pseudorange Stand-alone o differenziali, anche per le misure di fase, fornisce rispettivamente le coordinate X , Y , Z dei punti stazione o le componenti ΔX , ΔY , ΔZ del vettore *baseline* unente due stazioni rispetto a tale sistema cartesiano geocentrico.

- Il software all'interno dei ricevitori trasforma le coordinate cartesiane, ottenute come elaborazione delle misure pseudorange Stand-alone, in coordinate geografiche φ , λ , h sull'ellissoide geocentrico WGS 84.

- Tale ellissoide risulta rototraslato rispetto agli ellissoidi normalmente utilizzati in sede locale (es. per l'Italia l'Ellissoide Internazionale di Hayford, orientamento Roma M.te Mario - ITA40 - o orientamento medio europeo - ED50), bisogna tenere inoltre conto di un fattore di scala.

Trasformazioni fra Sistemi di Riferimento

- passaggio da coordinate cartesiane geocentriche a coordinate cartesiane su terna locale
 - *trasformazione a 7 parametri*

$$X_G, Y_G, Z_G \rightarrow X_L, Y_L, Z_L$$

- passaggio da coordinate ellissoidiche WGS84 a coordinate ellissoidiche su ellissoide locale
 - *formule di Molodenskij*

$$\varphi_G, \lambda_G \rightarrow \varphi_L, \lambda_L$$

Trasformazione a 7 parametri

- Consistono in una rototraslazione con fattore di scala fra il sistema globale e quello locale.

$$\begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + R(E_x, E_y, E_z) \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} (1+k)$$

X_L, Y_L, Z_L	coordinate cartesiane di un punto nel sistema locale (es. Ell. Hayford) S_L
X_G, Y_G, Z_G	coordinate cartesiane dello stesso punto nel sistema globale S_G
X_0, Y_0, Z_0	coordinate dell'origine del sistema S_G nel sistema S_L
E_X, E_Y, E_Z	rotazioni elementari intorno agli assi coordinati X, Y, Z di S_G agenti in senso antiorario
$1 + k$	fattore di scala, tiene conto delle diverse dimensioni degli ellissoidi coinvolti nella trasformazione ma anche delle distorsioni delle reti locali

La matrice di rotazione R è data da:

$$R(E_X, E_Y, E_Z) = \begin{bmatrix} \cos E_Z & \sin E_Z & 0 \\ -\sin E_Z & \cos E_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos E_Y & 0 & -\sin E_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin E_Y & 0 & \cos E_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos E_X & \sin E_X \\ 0 & -\sin E_X & \cos E_X \end{bmatrix}$$

Tale modello consente di passare dalle coordinate X, Y, Z dei punti determinati nel sistema WGS84 (S_G) alle coordinate di tali punti determinate con le usuali operazioni di triangolazione e trilaterazione, nel sistema locale (S_L).

- La **matrice R** contiene i 3 **angoli di rotazione E_x , E_y , E_z** degli assi WGS 84 rispetto a quelli del sistema locale espressi in radianti ed agenti in senso antiorario, essa si può ritenere il prodotto delle 3 matrici di rotazione R_z , R_y , R_x attorno agli assi.
- E' questa la cosiddetta **trasformazione a 7 parametri** (essendo i **7 parametri**: le coordinate X_0 , Y_0 , Z_0 , gli angoli E_x , E_y , E_z , il fattore $1+k$).

Essendo gli angoli di rotazione molto piccoli si possono introdurre le seguenti semplificazioni: $\cos E_{x,y,z} \cong 1$, $\sin E_{x,y,z} \cong E_{x,y,z}$, si trascurano inoltre i prodotti di ordine superiore, si ottiene così la matrice semplificata:

$$R \cong \begin{bmatrix} 1 & E_Z & -E_Y \\ -E_Z & 1 & E_X \\ E_Y - E_X & & 1 \end{bmatrix}$$

Tale modello presuppone però la perfetta congruenza geometrica, a meno del fattore di scala, tra l'insieme dei punti della rete determinati con GPS e gli stessi punti determinati con operazioni di rilievo tradizionale il che non è sempre ipotizzabile nella realtà a causa soprattutto delle distorsioni indotte nelle reti dalla propagazioni degli errori e dalle approssimazioni nei metodi usuali di riduzione alla superficie di riferimento (Pierozzi, 1989).

Il fattore $(1+k)$ presente nelle formule a 7 parametri tiene in effetti conto anche di tali distorsioni.

Formule di Molodenskij

Se si hanno a disposizione le coordinate ellissoidiche ϕ e λ e h dei punti della rete si può operare una trasformazione direttamente su tali coordinate applicando le cosiddette **Formule di Moloděnskij** di cui vengono di seguito fornite la forma estesa che tiene conto anche delle rotazioni fra i due sistemi di riferimento, ed una forma semplificata nella quale vengono considerati solamente i parametri di traslazione e la diversa forma dei due ellissoidi (4 parametri, analogamente alle formule di rototraslazione a 4 parametri), scritte per il passaggio dal Sistema WGS84 al sistema locale (es. Ellissoide di Hayford):

Formule di Moloděnskij complete:

$$d\varphi = \frac{\sin \varphi \cos \lambda}{\rho + h} \Delta x + \frac{\sin \varphi \cos \lambda}{\rho + h} \Delta y - \frac{\cos \varphi}{\rho + h} \Delta z + \frac{\frac{a^2}{N} + H}{\rho + h} \sin \lambda dE_x - \frac{\frac{a^2}{N} + h}{\rho + h} \cos \lambda dE_y +$$

$$+ \frac{(1 - (1 - \alpha)^2)N}{\rho + h} \cos \varphi \sin \varphi \left(dk + \frac{da}{a} \right) + \frac{\rho + (1 - f)^2 N}{\rho + h} \cos \varphi \sin \varphi \frac{df}{1 - f}$$

$$d\lambda = \frac{\sin \lambda}{(N + h) \cos \varphi} \Delta x - \frac{\cos \lambda}{(N + h) \cos \varphi} \Delta y - \frac{(1 - f)^2 N + h}{N + h} \operatorname{tg} \varphi \cos \lambda dE_x -$$

$$- \frac{(1 - \alpha)^2 N + h}{N + h} \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda dE_y + dE_z$$

$$dH = -\cos \varphi \cos \lambda \Delta x - \cos \varphi \sin \lambda \Delta y - \sin \varphi \Delta z + (1 - (1 - f)^2) N \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda dE_x -$$

$$- (1 - (1 - f)^2) N \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda dE_y - \left(\frac{a^2}{N} + h \right) dk - \frac{a}{N} da + (1 - f)^2 N \sin^2 \varphi \frac{df}{1 - f}$$

Formule di Moloděnskij semplificate:

$$\Delta\varphi'' = \{-\Delta x \sin\varphi \cos\lambda - \Delta y \sin\varphi \sin\lambda + \Delta z \cos\varphi + (a\Delta f + f\Delta a)\sin 2\varphi\} [\rho \sin 1'']^{-1}$$

$$\Delta\lambda'' = [-\Delta x \sin\lambda + \Delta y \cos\lambda] [N \cos\varphi \sin 1'']^{-1}$$

$$\Delta H_m = \Delta x \cos\varphi \cos\lambda + \Delta y \cos\varphi \sin\lambda + \Delta z \sin\varphi + (a\Delta f + f\Delta a)\sin^2\varphi - \Delta a$$

$\Delta\varphi''$, $\Delta\lambda''$, ΔH_m correzioni per trasformare le coordinate geografiche **dal sistema locale al WGS84**, in secondi di arco, H in metri.

Δx , Δy , Δz traslazioni fra i centri del sistema di riferimento locale e dell'ellissoide WGS 84

a semiasse maggiore dell'ellissoide del sistema locale

f schiacciamento dell'ellissoide del sistema locale

Δa , Δf differenze fra i semiassi maggiori e gli schiacciamenti degli ellipsoidi del sistema geodetico locale e WGS 84, rispettivamente (WGS 84 meno il locale)

N $a/(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}$ gran normale

ρ $a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}$ raggio di curvatura del meridiano

e eccentricità dell'ellissoide locale

Valori approssimati dei parametri necessari per applicare le formule [3.1] sono forniti dalla National Imagery and Mapping Agency (NIMA), l'approssimazione di questi parametri è di alcuni metri.

Tali valori si trovano nei software maggiormente in uso ed anche all'interno dei ricevitori.

Valori più precisi di questi parametri possono essere ricavati conoscendo le coordinate in entrambi i sistemi di riferimento in un certo numero di punti (*punti doppi*) superiore al minimo necessario (3 punti), viene così impostato un procedimento di calcolo ai minimi quadrati, risolvendo il sistema normale con le equazioni generatrici ricavate linearizzando le [3.1].

Per l'ellissoide internazionale con orientamento medio europeo (ED50) si possono assumere, come parametri di traslazione e di scala, i seguenti valori - WGS84 meno sistema locale - (NIMA, Technical Report):

Tx	Ty	Tz	Δa	Δf
- 87 m	- 98 m	- 121 m	- 251 m	$0,14192702 * 10^{-4}$

L'Istituto Geografico Militare Italiano (IGM) ha completato da anni la rete IGM95 e forniva per ciascun punto doppio i valori dei parametri di rototraslazione e di scala emanabili in un intorno di 15 km dal punto. Con l'utilizzo di questi parametri era possibile effettuare la trasformazione dalle coordinate WGS84 alle coordinate nel sistema IGM40 e viceversa.

Attualmente l'IGM distribuisce il software "Verto" per la trasformazione da coordinate WGS 84 a coordinate nei sistemi ITA40 ed ED50, e viceversa. Il calcolo di trasformazione è effettuato mediante interpolazione dei punti doppi, punti della rete di livellazione, punti gravimetrici e punti della rete geodetica italiana e della rete IGM '95. Il software fornisce (mediante caricamento di files a pagamento, per estensioni pari ad un quadrante 1:50.000 oppure una tavoletta 1:25.000) anche i valori delle ondulazioni geodiche, mediante interrogazione del modello ITALGEO'99, sviluppato dal Politecnico di Milano.⁶

Trasformazioni di coordinate

- da cartesiane locali a geografiche

$$X_L, Y_L, Z_L \longrightarrow \varphi_L, \lambda_L, H_L$$

inversione delle:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_\varphi + H) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N_\varphi + H) \cos \varphi \sin \lambda \\ [N_\varphi (1 - e^2) + H] \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Per ottenere le φ , λ , h a partire da X , Y , Z bisogna invertire le formule [3.2], per fare ciò è necessario ricorrere ad un procedimento iterativo, a causa del fatto che la latitudine che si ottiene è funzione trascendente (la φ compare a sinistra e a destra dell'uguaglianza).

Si ottiene facilmente dalle [3.2], dividendo la seconda equazione per la prima:

$$\operatorname{tg} \lambda = Y/X \quad \text{da cui (Crocetto, 1996):}$$

$$\lambda = 2 \operatorname{atn} \frac{Y}{X + \sqrt{X^2 + Y^2}} \quad [3.3]$$

$$h = \sqrt{X^2 + Y^2} \cos \varphi + Z \sin \varphi - \frac{a^2}{N} \quad [3.4]$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{Z \cdot a}{c \sqrt{X^2 + Y^2}} \quad [3.5] \quad u: \text{ latitudine ridotta}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{Z \cdot c}{a \sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot c}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \right) \quad [3.6]$$

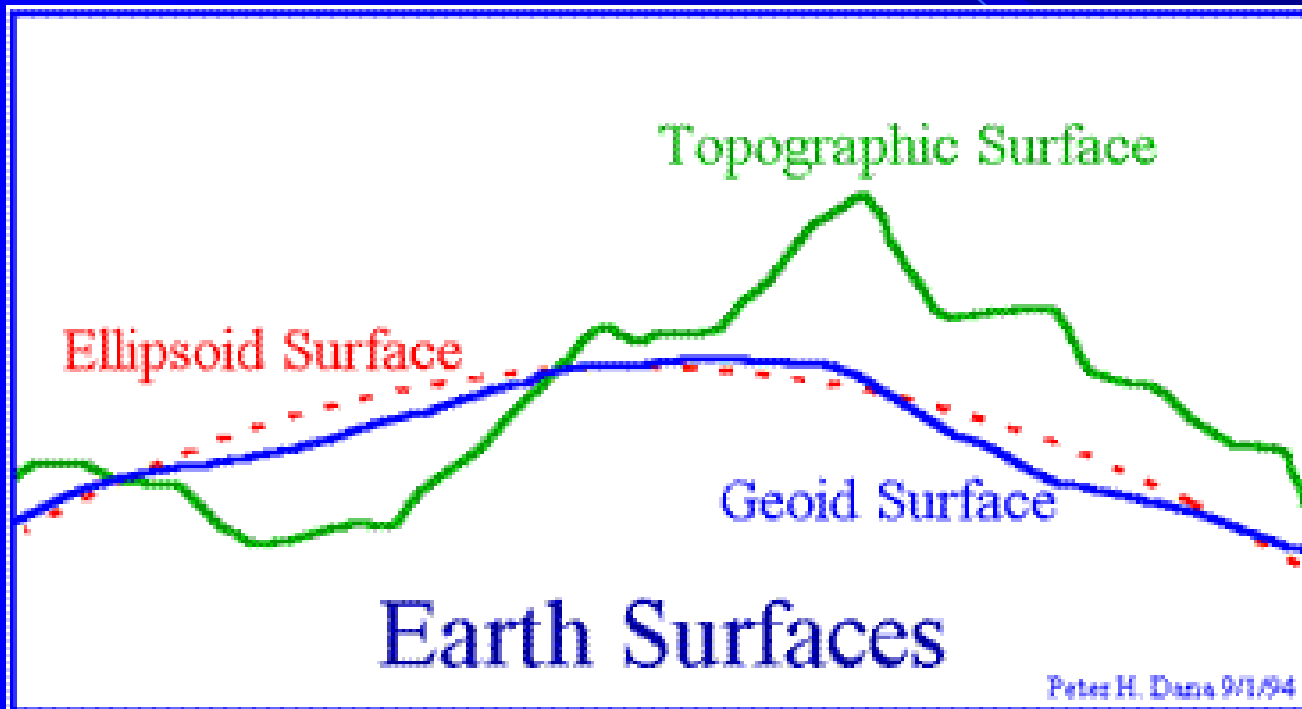
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z + \varepsilon \cdot c \cdot \sin^3 u}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 a \cdot \cos^3 \varphi} \quad \text{formula di Bowring} \quad [3.7]$$

$$\text{con } \varepsilon = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \quad \text{seconda eccentricità}$$

Trasformazione di Quote

- Le quote h essendo sempre riferite all'ellissoide WGS84 differiscono notevolmente, mediamente, in Italia, di $40 \div 50$ metri, da quelle geoidiche utilizzate in tutte le rappresentazioni e, dato che le *ondulazioni* N , ovvero gli scostamenti fra le due superfici di riferimento, sono note spesso solo approssimativamente, la trasformazione altimetrica fra i due sistemi rappresenta un problema di non facile soluzione cosicché il GPS non può sostituire nella maggior parte dei casi una livellazione di tipo tradizionale.

Geoide ed Ellissoide



Quote geoidiche ed ellissoidiche

