MECCANICA HAMILTONIANA

EQUAZIONI DI HAMILTON

Le equazioni di Lagrange sono n equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Uno può passare a $\underline{2n}$ equazioni differenziali del 1° ordine nel solito modo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}, t) \end{cases}$$

Tuttavia, questo non è sempre il metodo più conveniente per passare a equazioni differenziali del 1° ordine.

Equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = 0$$

l'idea è di definire nuove VARIABILI

$$(*) \qquad p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad h = 1, \dots, n$$

MOMENTI CONIUGATI

↑

Ora p_h sono intese come vere e proprie coord.

In queste nuove coord. le equazioni di Lagrange diventano

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n$$

Vogliamo invertire le relazioni (*) per trovare

$$\dot{\bar q} = \bar u(\bar p, \bar q, t) \qquad (0)$$

Perché sia ammissibile questa inversione deve avvenire che:

$$\det\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}_{=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_j \partial \dot q_k}}\Big) \neq 0$$

← Cambiamento di coordinate invertibile

Per sistemi MECCANICI $(L = T - V)$ con $V = V(q)$

e $T = T_2 + T_1 + T_0$

$$\rightsquigarrow \quad p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = \sum_{l=1}^{n} a_{hl}\,\dot q_l + b_h$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} = a_{ij}$$ che è invertibile $(\det a \neq 0)$

$$\dot{\bar q} = a^{-1}(\bar p - \bar b(q,t))$$

← qsta è la funzione che in (0) abbiamo chiamato $\bar u(p,q,t)$

Le equazioni di Lagrange prendono la forma:

$$\begin{cases} \dot p_h = \dfrac{\partial L}{\partial q_h}\left(\bar q, a^{-1}(\bar p - \bar b), t\right) \\ \dot q_h = a^{-1}(\bar p - \bar b) \end{cases}$$

← eq. di Lagr. vere e proprie

← ottenute dalla relaz. tra $\bar p$ e $\dot{\bar q}$.

Quindi arriviamo a eq. diff. del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\bar p} = \bar f_p(\bar p, \bar q, t) \\ \dot{\bar q} = \bar f_q(\bar p, \bar q, t) \end{cases}$$

← $\dot{\bar x} = \bar f(\bar x, t)$

con $\bar f = \begin{pmatrix} \bar f_q \\ \bar f_p \end{pmatrix}$ che ha una forma particolare che ora vedremo.

Prop. Si consideri una Lagrangiana $L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$ con det. Hessiano non nullo, cioè $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$.

Allora il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_h = u_h(p,q,t) & \longleftarrow \text{ottenute invertendo } p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(q,\dot{q},t) \\ \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(q,u(p,q,t),t) & \longleftarrow \text{eq. di Lagrange} \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$(*) \quad \boxed{\begin{cases} \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}(\bar{p},\bar{q},t) \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(\bar{p},\bar{q},t) \end{cases} \quad \text{con} \quad H(\bar{p},\bar{q},t) \equiv \left[\bar{p}\cdot\dot{\bar{q}} - L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\right]\Big|_{\dot{\bar{q}}=\bar{u}(\bar{p},\bar{q},t)}}$$

Inoltre si ha $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

H è detta HAMILTONIANA (o funz. di Hamilton)

le eq. $(*)$ sono dette EQ. DI HAMILTON (o eq. canoniche)

Dim. Siccome per ipotesi $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$, allora

$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ si può invertire, ottenendo $\dot{q}_h = u_h(p,q,t)$

$\Rightarrow H(\bar{p},\bar{q},t)$ è ben definita:

$$H(p,q,t) = \sum_k p_k u_k(p,q,t) - L(q,u(p,q,t),t)$$

Ora facciamo le derivate parziali di H :

$$\frac{\partial H}{\partial q_h}(p,q,t) = \sum_k \cancel{p_k \frac{\partial u_k}{\partial q_h}(p,q,t)} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(q,u(p,q,t),t)$$

$$- \sum_\ell \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q,u(p,q,t),t)}_{=p_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}(p,q,t)}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_h}(q,u(p,q,t),t) \quad = -\dot p_h$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_h}(p,q,t) = \sum_k \delta_{hk} u_k(p,q,t) + \sum_k \cancel{p_k \frac{\partial u_k}{\partial p_h}(p,q,t)}$$

$$- \sum_\ell \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q,u(p,q,t),t)}_{=p_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial p_h}(p,q,t)}$$

$$= u_h(p,q,t) \quad = \dot q_h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot p_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \\[2ex] \dot q_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases}$$

Inoltre $\displaystyle \frac{\partial H}{\partial t} = \cancel{\sum_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial t}} - \frac{\partial L}{\partial t} - \cancel{\sum_\ell \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial t}} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

Dimostrazione alternativa.

Dalla def. di differenziale:

$$dH = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} dq_m \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

= Ora facciamo il diff. della funz. $H = (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L)_{\dot{\bar{q}} = \bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)}$

(□)

$$dH = \sum_{m=1}^{n} \boxed{p_m} \underbrace{du_m}_{} + \sum_{m=1}^{n} u_m dp_m - \sum_{m=1}^{n} \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}} du_m - \sum_m \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

è il differenziale della funzione $\bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)$

Notiamo che il differenziale della funz. $\bar{u}(\bar{p}, \bar{q}, t)$ appare in due punti; siccome $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$ questi contributi si cancellano.

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\dot{q}_m dp_m - \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

(□) vettori sono uguali quando sono uguali le componenti rispetto a una base (dp_m, dq_m, dt)

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \dot{p}_n$$

Eq. di Lagrange

//

Quindi le eq. del moto si possono esprimere come

$$\begin{cases} \dot{p}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}(p, q, t) \\ \dot{q}_n = \dfrac{\partial H}{\partial p_n}(p, q, t) \end{cases} \qquad \text{def. } \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{x}} = \bar{f}(x, t)$$

Vediamo che forma assume $\bar{f}$:

$$\bar{f}(x,t) = \begin{pmatrix} -\bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nabla}_p H \\ \bar{\nabla}_q H \end{pmatrix} =$$

vett. 2n-dim.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Chiamiamo questa matrice } E} \bar{\nabla}_x H$$

$\Rightarrow$ Le eq. di Hamilton si possono riscrivere come

$$\dot{x} = E \, \bar{\nabla}_x H \qquad \text{con} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ MATRICE ANTISIMMETRICA

NOTAZIONE COMPATTA

In componenti: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2n} E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}(x,t) \qquad i = 1, \dots, 2n$

Le componenti della matrice E sono $\rightarrow$

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & i,j = 1, \dots, n \\ -\delta_{hk} & i=h \quad j=k+n \quad h,k = 1,\dots,n \\ \delta_{hk} & i=h+n \quad j=k \quad h,k=1,\dots,n \\ 0 & i,j = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

<u>Prop.</u> In un sistema meccanico, H prende la forma:

$$H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{omogenea di grado 2 in } \dot{q}}}{T_2} - T_0 + V$$

$\rightarrow$ Nel caso di vincoli indip. dal tempo, $H = T + V$ (en. tot. del sistema)

Dim. T_2, T_1, T_0 sono funz. omogenee di grado rispettivamente $2, 1, 0$:

$$\sum_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = \sum_h \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h =$$

$$= 2T_2 + T_1 + 0$$

Quindi

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$

$$= T_2 - T_0 + V. \quad //$$

Esempi

1) PTO MATERIALE in coord. cartesiane

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad V = V(x, y, z)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad p_y = m\dot{y} \qquad p_z = m\dot{z}$$

invertiamo

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z) = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V$$

Energia cinetica

2) Oscillatore ARMONICO

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \longrightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}$$

3) Forze elettromagnetiche

$$\bar{F} = e\,(\bar{E} + \dot{\bar{q}} \times \bar{B})$$

$$\bar{E} = -\left(\bar{\nabla}\phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

$\bar{F}$ si ricava da $V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \underbrace{e\,\phi(\bar{q})}_{V_0} \underbrace{- e\,\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}(\bar{q})}_{V_1}$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\bar{q}}^2 + e\,\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A} - e\,\phi$$

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = m\dot{q}_h + e A_h \Rightarrow \dot{q}_h = \frac{p_h - e A_h}{m} \qquad (\neq)$$

$$H = \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L\Big|_{(\neq)} = \bar{p} \cdot \left(\frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}\right)^2 - e\left(\frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m}\right) \cdot \bar{A} + e\phi$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{H = \frac{(\bar{p} - e\bar{A})^2}{2m} + e\,\phi} = T + V_0$$

"Invarianza di GAUGE":

Dinamica CLASSICA dipende solo da $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ e $\bar{A} + \bar{\omega}$ sono EQUIVALENTI se $\bar{\nabla}\omega = 0$ (cioè se ω è una 1-forma CHIUSA)

Infatti le eq. di Hamilton sono

$$\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{1}{m}\sum_{h=1}^{3}(p_h - eA_h)\frac{\partial A_h}{\partial q_i}(-e) = e\sum_h \dot q_h \frac{\partial A_h}{\partial q_i}$$

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}(p_i - eA_i)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot q_i = \frac{1}{m}\dot p_i - e\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial q_j}\dot q_j = \frac{e}{m}\sum_j \dot q_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right)$$

$\leadsto$ Troviamo la stessa equazione del moto se sostituiamo

$$\bar A \mapsto \bar A + \bar\nabla\lambda \qquad (*)$$

$$\left(\text{Infatti } \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \mapsto \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} + \cancel{\frac{\partial^2\lambda}{\partial q_i \partial q_j}} - \cancel{\frac{\partial^2\lambda}{\partial q_j \partial q_i}}\right)$$

$\Rightarrow$ La dinamica del sistema è invariante sotto la trasf. $(*)$, chiamata TRASFORMAZIONE DI GAUGE

Notiamo che $\bar A$ e $\bar A' = \bar A + \bar\nabla\lambda$ danno lo stesso campo magnetico $\bar B$ (perché $\bar\nabla \times \bar\nabla\lambda = 0$). Quindi abbiamo appena riscoperto che la dinamica classica dipende solo dal campo magnetico $\bar B$ (non dal particolare $\bar A$).

Notiamo che le eq. del moto di $\bar p(t)$ cambiano sotto $(*)$; questo avviene perché $(*)$ cambia la definizione di momento coniugato. Si nota però che $(*)$ non cambia quello che chiamiamo velocità della particella ($\dot{\bar q}$) che è la grandezza fisica effettivamente osservabile.

FORMULAZIONE VARIAZIONALE

Siamo interessati alle traiettorie nello sp. delle fasi

$$\underbrace{p_i(t) \qquad q_i(t)}_{\text{sono funzioni}} \qquad i=1,\dots,n$$

sono funzioni $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$

Funzionale AZIONE HAMILTONIANA

$$S[\bar{p},\bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \Big[\underbrace{\sum_{h=1}^{n} p_h(t)\,\dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t),\bar{q}(t),t)}_{L(\bar{q}(t),\,\dot{\bar{q}}(t),\,t)} \Big]\, dt$$

Se il sistema Hamiltoniano è equiv. a un sist. Lagrangiano, S coincide con l'azione Hamiltoniana vista in precedenza.

[Se ho $\mathcal{S}[\bar{p},\bar{q}] = \int dt\ F(\bar{p}(t),\bar{q}(t),t)$

$$\delta\mathcal{S} = \frac{d}{d\alpha}\int dt\,\Big[F(\bar{p}+\alpha\delta\bar{p},\ \bar{q}+\alpha\delta\bar{q},t)\Big]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int dt \sum_h \left(\frac{\partial F}{\partial p_h}\delta p_h + \frac{\partial F}{\partial q_h}\delta q_h \right)$$
]

$$S[\bar{p},\bar{q}] \equiv \int_{t}^{t_1} \Big[\sum_{h=1}^{n} p_h(t)\,\dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t),\bar{q}(t),t) \Big]\, dt$$

$$\delta S[\bar p, \bar q, \delta \bar p, \delta \bar q] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{m} \Big[\underbrace{\delta p_s(t)\, \dot q_s(t)}_{\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\sum_h p_h \dot q_h\right)\delta p_s} + p_s(t)\, \delta \dot q_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}\, \delta p_s(t) - \frac{\partial H}{\partial q_s}\, \delta q_s(t) \Big]\, dt$$

Integriamo per parti

$$\delta \dot q_s = \frac{d}{dt}\, \delta q_s$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{m} \Big[\Big(\dot q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \Big) \delta p_s - \Big(\dot p_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} \Big) \delta q_s \Big]\, dt + \sum_{s=1}^{m} p_s\, \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Prop: Il moto $\bar p(t), \bar q(t)$ ($t_0 \le t \le t_1$) rende stazionario il funzionale azione $S[\bar p, \bar q]$ corrispondente a una data Hamiltoniana H, per variazioni arbitrarie e per $\delta \bar q$ nulle agli estremi, SE E SOLO SE esso soddisfa le eq. di Hamilton relative a H.