

Riassunto

Formulazione Lagrangiana (coord. q, \dot{q})

- eq. del moto ricavate dalla funz. Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \quad h=1, \dots, n$$

Formulazione Hamiltoniana (coord. p, q)

- eq. del moto ricavate dalla funz. Hamiltoniana $H(p, q, t)$

$$\begin{cases} \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases} \quad h=1, \dots, n \quad \leftrightarrow \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2n} E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix}$

Riassumiamo i vari spazi entrati in gioco finora.

SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI : Q con coord. (q_1, \dots, q_n)

Formalismo Lagrangiano: Q è completato a uno spazio

$2n$ -dimensionale detto

SPAZIO DEGLI STATI TQ con coord. $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

"FIBRATO TANGENTE"

Formalismo Hamiltoniano: Q è completato a uno spazio

$2n$ -dimensionale detto

SPAZIO DELLE FASI T^*Q con coord. $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$

"FIBRATO COTANGENTE"

PARENTESI DI POISSON

Def. PARENTESI DI POISSON è un'operazione bilineare che prende come input due funzioni di (p, q, t) definite sullo sp. delle fasi e restituisce un'altra funzione di (p, q, t) :

$$f(p, q, t), g(p, q, t) \mapsto \{f, g\}(p, q, t)$$

dove

$$\{f, g\}(p, q, t) = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial g}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} \right)$$

Nel FORMALISMO COMPATTO :

Parentesi di Poisson:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Infatti possiamo risolvere il termine di destra come

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x f \cdot E \bar{\nabla}_x g &= (\bar{\nabla}_p f, \bar{\nabla}_q f) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nabla}_p g \\ \bar{\nabla}_q g \end{pmatrix} = \\ &= (\bar{\nabla}_q f, -\bar{\nabla}_p f) \begin{pmatrix} \bar{\nabla}_p g \\ \bar{\nabla}_q g \end{pmatrix} = \bar{\nabla}_q f \cdot \bar{\nabla}_p g - \bar{\nabla}_p f \cdot \bar{\nabla}_q g = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right) \\ &\uparrow \\ &\text{in componenti} \end{aligned}$$

Proprietà delle Parentesi di Poisson

$$a) \{f, g\} = -\{g, f\} \Rightarrow \{f, f\} = 0 \quad \text{ANTISIM.}$$

$$b) \{f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1 \{f, g_1\} + \alpha_2 \{f, g_2\} \quad \text{BILINEAR}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$c) \{f, g_1 \cdot g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$$

d) Identità di Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

La Parentesi di Poisson è un'applicazione BILINEAR. ANTISIM.

che soddisfa l'ID. DI JACOBI

(ci permette di definire un'ALGEBRA DI UE)

$$\{f, g\} = \sum_n \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} \right) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Dim

a) } ovvio
b) }

$$c) \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_1 \cdot g_2) = \left(\sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \right) g_2 + \left(\sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g_2}{\partial x_j} \right) g_1$$

$$d) \underbrace{\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}} = 0$$

Notatione :

$$\partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned} & \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \\ & = \sum_{i,j=1}^{2n} \partial_i f E_{ij} \partial_j \left[\sum_{k,m=1}^{2n} \partial_k g E_{km} \partial_m h \right] - \sum_{a,b=1}^{2n} \partial_a g E_{ab} \partial_b \left[\sum_{c,d=1}^{2n} \partial_c f E_{cd} \partial_d h \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{ijklm} \left[\partial_i f E_{ij} \partial_j \partial_k g E_{km} \partial_m h + \partial_i f E_{ij} \partial_k g E_{km} \partial_j \partial_m h \right]$$

$$- \sum_{abcd} \left[\partial_a g E_{ab} \partial_b \partial_c f E_{cd} \partial_d h + \partial_a g E_{ab} \partial_c f E_{cd} \partial_b \partial_d h \right]$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ k & & i & & m & j \end{matrix}$

$$= \sum_{ijklm} \left[\partial_i f E_{ij} \partial_j \partial_k g E_{km} \partial_m h \right] + \cancel{\sum_{ijklm} \partial_i f E_{ij} \partial_k g E_{km} \partial_j \partial_m h}$$

$$- \sum_{abcd} \left[\partial_a g E_{ab} \partial_b \partial_c f E_{cd} \partial_d h \right] - \cancel{\sum_{ijklm} \partial_k g E_{km} \partial_i f E_{ij} \partial_m \partial_j h}$$

$= \partial_j \partial_m h$

$$= \sum_{ijklm} \left[\partial_i f E_{ij} \partial_j \partial_k g E_{km} \partial_m h - \partial_j g \underbrace{E_{ji}}_{=-E_{ij}} \partial_i \partial_k f E_{km} \partial_m h \right]$$

$$= \sum_{km} \left(\sum_{ij} \left(\partial_i f E_{ij} \partial_k \partial_j g + \partial_k \partial_i f E_{ij} \partial_j g \right) \right) E_{km} \partial_m h$$

$$= \sum_{km} \partial_k \left(\sum_{ij} \partial_i f E_{ij} \partial_j g \right) E_{km} \partial_m h = \{ \{f, g\}, h \} = - \{ h, \{f, g\} \} //$$

Parentesi di Poisson FONDAMENTALI

Scegliamo come f e g le funzioni $\bar{p} \mapsto p_n \leftarrow p_n$

$\bar{q} \mapsto q_n \leftarrow q_n$

$$\{p_n, p_k\} = \sum_l \left(\underbrace{\frac{\partial p_n}{\partial q_l}}_0 \frac{\partial p_k}{\partial p_l} - \frac{\partial p_n}{\partial p_l} \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q_l}}_{\delta_{kl}} \right) = 0 \quad \forall n, k = 1, \dots, m$$

$$[F(x, y) = x, \partial_x F = 1, \partial_y F = 0]$$

$$\{q_n, q_k\} = 0 \quad \forall n, k = 1, \dots, m$$

$$\{q_n, p_k\} = \sum_l \left(\underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial q_l}}_{\delta_{nl}} \frac{\partial p_k}{\partial p_l} - \underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial p_l}}_0 \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q_l}}_0 \right) = \sum_l \delta_{nl} \delta_{kl} = \delta_{nk}$$

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{r,s=1}^{2m} \frac{\partial x_i}{\partial x_r} E_{rs} \frac{\partial x_j}{\partial x_s} = E_{ij}$$

Osservazione:

$$\{x_s, g(\bar{x})\} = \sum_{ij} \frac{\partial x_s}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_j E_{sj} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$\{\bar{x}, g\} = E \nabla g \quad \Rightarrow \quad \{p_n, g(p, q)\} = - \frac{\partial g}{\partial q_n}$$

$$\{q_n, g(p, q)\} = \frac{\partial g}{\partial p_n}$$

Se $g = H$ $\dot{x}_i = \sum_j E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{x_i, H\}$

\rightarrow Eq. Ham. $\dot{x}_i = \{x_i, H\} \quad i = 1, \dots, 2m$

PARENTESI DI POISSON E COST. DEL MOTO

variabile dinamica

Cost. del Moto : $f(\bar{p}, \bar{q}, t)$ t.c. se la valutiamo sulle soluzioni $(\bar{p}(t), \bar{q}(t))$ delle equazioni di Hamilton, si ha $\frac{d}{dt} f(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) = 0$.

Svolgiamo la derivata delle funt. composte:

$$\frac{d}{dt} f(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_e} \dot{p}_e + \frac{\partial f}{\partial q_e} \dot{q}_e \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{e=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial p_e} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_e} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_e} \left(\frac{\partial H}{\partial p_e} \right) \right]$$

prendiamo $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$ che soddisfano eq. Ham.

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_e} \frac{\partial H}{\partial p_e} - \frac{\partial f}{\partial p_e} \frac{\partial H}{\partial q_e} \right)}_{= \{f, H\}} \text{ PARENTESI DI POISSON}$$

Cioè:

$$\frac{d}{dt} f(p(t), q(t), t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quando } p(t) \text{ e } q(t) \\ \text{soddisfano le eq. di Ham}}}{=} \{f, H\}(p(t), q(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(p(t), q(t), t)$$

Quindi:

f è una COST. DEL MOTO

\iff

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \stackrel{\text{identicam. come funzione}}{=} 0$$

(f indep. da t)

$$(\{f, H\} = 0)$$

Conservazione dell'Energia in meccanica Hamiltoniana

Vediamo quando l'Hamiltoniana è essa stessa una cost. del moto

$$\frac{dH(p(t), q(t), t)}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$\stackrel{=0}{=} \text{in antisimmetria delle Parentesi di Poisson}$

$\leftarrow H$ è cost. del moto quando è indep. esplicitam. da t

(cioè quando $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

Extra: Parentesi di Poisson e derivata di Lie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(\bar{x}(t), t) &= \frac{\partial G}{\partial t} + \left[G, H \right] = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 f_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = \\ \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\} \end{aligned}$$

In generale

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{E\bar{V}_g} f = \sum_i \left(\sum_j E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \bar{V}_f \cdot E \bar{V}_g$$

$$\{g, f\} = \bar{V}_g \cdot E \bar{V}_f = \sum_{ij} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} =$$

ANTISIM.

$$= - \sum_{ij} E_{ji} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = - \sum_{rs} E_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial g}{\partial x_s} = - \{f, g\}$$