Logica Lezione 8

Meta-Logica

(Correttezza e Completezza)

- Abbiamo già sottolineato la differenza tra $\vdash$ e $\models$.

- Si tratta di nozioni diverse, definite in termini diversi e riferite a costruzioni diverse:

- Derivazioni ($\vdash$), e tavole di verità ($\models$)
- Sintassi ($\vdash$), e semantica ($\models$)

- Ma, allo stesso tempo, sappiamo di averli sviluppati per lo stesso scopo:

  determinare quali argomenti sono validi.

- Ci aspettiamo quindi che entrambi colgano cosa sono gli argomenti validi.

  E ci auguriamo che diano risposte convergenti!
- Ovvero, se un'argomento da A a B è logicamente valida allora:

  $A \vdash B$ **e** $A \models B$

- Analogamente, se qualcosa è una legge logica, ci aspettiamo che

  $\vdash A$ **e** $\models A$

- Speriamo anzi che coincidano:

Se A $\vdash$ B, allora A $\models$ B, e viceversa.

(E, senza premesse, se $\vdash$ A, allora $\models$ A, e viceversa.
ovvero teoremi e tautologie coincidano).

- In altre parole, ci aspettiamo che $\vdash$ e $\models$ identifichino lo stesso insieme di argomenti.

- Ma è tutt'altro che scontato che sia così.

- Dimostrare questo (e altri fatti SULLA logica) è il compito della **meta-logica**.

  ("meta" per "oltre")

- Notare la differenza tra logica e meta-logica.

- Cio` che studia la logica e`:
  - quali argomenti sono validi?

- La meta-logica invece studia la logica stessa!
  - (cioè, ad esempio, le derivazioni e i metodi delle tavole di verità coincidono?).

- È impossibile fare meta-logica, se la logica non è definita in modo rigoroso.

- Per questo motivo la meta-logica è possibile solo se la logica è matematicamente ben definita.

- Definizioni matematiche di derivazioni, di valutazioni semantiche, di tautologia ecc...

- In questa sede, ci limitiamo ad abbozzare tali definizioni e a saltare una trattazione puramente matematica.

- Ma abbiamo detto più volte che un trattamento matematico così rigoroso è possibile.

- I meta-teoremi più importanti sulla logica proposizionale sono due:

  (meta)**teorema di correttezza**

  e il

  (meta)**teorema di completezza**

Nota:

si tratta di META-teoremi e non di teoremi, perché non dimostriamo una fbf ottenuta con la deduzione naturale.

Dimostriamo, fuori dal calcolo, una proprietà generale delle nostre derivazioni logiche e della nostra semantica formale.

1. Teorema di correttezza

- Supponiamo di dimostrare un teorema $\vdash A$.
- Possiamo essere sicuri che A è sempre vero?
  - (cioè che la sua tavola di verità dà sempre 1? cioe` che e` una tautologia?).

- In altre parole,
- possiamo dimostrare che

se $\vdash A$,

allora $\models A$?

- <u>Sì.</u>

  <u>E questo è il teorema di correttezza</u>.

- Dimostra che tutte le nostre derivazioni di **teoremi** dimostrano solo **tautologie**.

- Si dimostra per induzione.

→ Quindi è fondamentale che l'insieme delle fbf e delle derivazioni sia un insieme induttivo.

(Saltiamo la dimostrazione)

Teorema di correttezza generale

- Possiamo anche dimostrarlo più in generale per i *sequenti*, mostrando che

  se

  $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$

  allora

  $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

Teorema di completezza

- Supponiamo ora di avere un argomento che sappiamo essere *semanticamente valido*.

- Esiste anche una *derivazione* corrispondente?

- Forse si potrebbe verificare una situazione del genere:

  l'argomento è semanticamente valido,

  ma non riusciamo a trovare una derivazione perché, semplicemente, non c’e’.

- Come facciamo a sapere che le nostre derivazioni sono sufficientemente potenti da coprire tutti gli argomenti logicamente validi?

- Come facciamo a sapere che, se l'argomento è valido, esiste sempre una derivazione?

- Come facciamo a sapere che il nostro calcolo è **completo** in questo senso?

  Cioe` che abbiamo tutte le regole che ci servono per ottenere **tutti** gli argomenti logicamente validi?

- Questo è il contenuto della teorema di **completezza**

- Esso afferma che se un argomento da A_1, A_2 ,..., A_n a B è semanticamente valido,

  allora esiste una **derivazione** dalle premesse A_1, A_2 ,..., A_n a B.

- Ovvero,

  il teorema di completezza afferma che

  se $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

  allora

  $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$

- Analogamente al caso del teorema di correttezza, esiste anche una versione più ristretta del teorema di completezza:

se una proposizione è una tautologia, allora è anche un teorema del calcolo.

Se $\models A$

allora $\vdash A$

- La dimostrazione e` particolarmente laboriosa, e matematicamente non banale.

  (Noi saltiamo qui la dimostrazione)

- Si noti che, presi insieme, i due (meta)teoremi dicono qualcosa di molto importante sulla nostra logica e sul calcolo in particolare:

- Dicono che il nostro **calcolo** è **corretto** (tutti i suoi risultati sono semanticamente validi)
- ed è **completo** (copre tutti gli argomenti validi).

- Il fatto che la nostra logica abbia queste caratteristiche è notevole!

- Nota

  puo’ darsi che questi risultati non vi suonino molto sorprendenti, perché forse vi aspettavate che reggessero fin dall'inizio.

- Ma non sono ovvi e anzi per altre logiche e calcoli logici questi meta-teoremi possono fallire!

  (La logica del second’ordine, ad esempio, non e` completa!)

- Anche l’aritmetica (e in generale la matematica) non e’ completa in questo senso!

  Per l’aritmetica non c’e` un calcolo o che ci permetta di ottenere tutte e sole le verita` matematiche.

  (Questo e’ il famoso teorema di incompletezza dell’aritmetica di Gödel).

- Si noti che e` spiacevole, ma non disastroso, non avere la completezza.
- Ma assolutamente non possiamo rinunciare alla correttezza.
- Altrimenti significa che le nostre derivazioni potrebbero dimostrare argomenti non validi e falsi teoremi!

- Possiamo invece convivere con un calcolo incompleto.
  - Un calcolo incompleto è qualcosa di corretto, ma non abbastanza forte da dare tutto ciò che vogliamo.

- Tutto ciò che dimostra è buono, anche se non dimostra tutti i buoni risultati.