

3.4 Fasci di iperpiani

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo le corrispondenti nozioni negli spazi proiettivi. Come vedremo, la situazione è semplificata, o meglio c'è un'unica nozione di fascio.

Definizione 3.4.1. Se $P \in \mathbb{P}^2$, diciamo *fascio di rette di centro P* l'insieme Φ_P di tutte e sole le rette del piano passanti per P .

La dimostrazione del seguente risultato è del tutto analoga a quella vista nel piano affine.

Proposizione 3.4.1. *Nel piano proiettivo \mathbb{P}^2 con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$, siano P un punto, $r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ e $s : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ due rette distinte per P . Allora il fascio di rette di centro P è dato da*

$$\Phi_P : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Se si esprime Φ_P con la precedente equazione, le rette r e s si dicono ancora *generatori* del fascio. Il loro ruolo può essere attribuito a una qualunque coppia di rette distinte di Φ_P .

Osservazione 3.4.1. Si noti che la scrittura $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ è del tutto equivalente a quella usata nel caso affine: $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ovviamente, non si era utilizzata in quel contesto solo perché non si erano ancora introdotti gli spazi proiettivi.

Osservazione 3.4.2. La scrittura $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ ha un evidente vantaggio: permette di stabilire chiaramente una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ_P e i punti di \mathbb{P}^1 . Infatti si verifica facilmente che, posta $r_{\lambda, \mu}$ la retta di Φ_P di equazione $\lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$, l'applicazione

$$\Phi_P \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad r_{\lambda, \mu} \mapsto [\lambda, \mu]$$

è ben definita e biunivoca. Questo dà un significato preciso all'espressione "un fascio di rette nel piano è costituito da ∞^1 rette".

Esempio 3.4.1. Determiniamo il fascio di rette Φ_P dove $P = [1, 2, 3] \in \mathbb{P}^2$. Per fare questo, basta determinarne due generatori. Ad esempio,

$$r : 3x_0 - x_2 = 0, \quad s : 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Dunque

$$\Phi_P : \lambda(3x_0 - x_2) + \mu(3x_1 - 2x_2) = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1.$$

Come visto per lo spazio affine, è naturale definire la seguente nozione e il relativo risultato.

Definizione 3.4.2. Se $r \subset \mathbb{P}^3$ è una retta, diciamo *fascio di piani di sostegno r* l'insieme \mathcal{F}_r di tutti e soli i piani dello spazio contenenti r .

Proposizione 3.4.2. In \mathbb{P}^3 con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino la retta r e i due piani distinti $\pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ e $\sigma : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ contenenti r . Allora il fascio di piani di sostegno r è dato da

$$\mathcal{F}_r : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Con ovvie notazioni, posto $\pi_{\lambda, \mu}$ il generico piano del precedente fascio, si ha che l'applicazione

$$\mathcal{F}_r \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad \pi_{\lambda, \mu} \mapsto [\lambda, \mu]$$

è ben definita e biunivoca. Quindi, anche in questo caso, possiamo dire che un fascio di piani nello spazio è costituito da ∞^1 piani.

Esempio 3.4.2. Determinare tutti i piani di \mathbb{P}^3 passanti per i punti $A = [1, 2, 3, 4]$ e $B = [-1, 5, 7, 0]$.

Chiaramente i piani richiesti sono tutti e soli quelli del fascio \mathcal{F}_r di sostegno la retta r passante per A e B . Tale retta, determinata nell'Esempio 3.3.5, è

$$r : \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 & = 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}_r : \lambda(x_0 + 10x_1 - 7x_2) + \mu(20x_0 + 4x_1 - 7x_3) = 0.$$

Si osservi che abbiamo dato un'unica nozione di fascio (sia di rette che di piani) senza distinguere tra “propri” e “impropri”. La ragione sarà chiara nel prossimo paragrafo.

Quanto visto si può generalizzare in uno spazio proiettivo di dimensione qualunque, osservando che il *luogo base* (cioè l'insieme dei punti comuni a tutti i sottospazi del fascio) è un punto, nel caso delle rette di \mathbb{P}^2 , e una retta, nel caso dei piani di \mathbb{P}^3 . In entrambe le situazioni si tratta di un sottospazio proiettivo di codimensione 2.

Definizione 3.4.3. Sia $L \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$ (i.e. di codimensione 2). Diciamo *fascio di iperpiani di sostegno L* l'insieme \mathcal{F}_L di tutti e soli gli iperpiani di \mathbb{P}^n contenenti L .

Proposizione 3.4.3. Nello spazio proiettivo \mathbb{P}^n con coordinate $[x_0, \dots, x_n]$, si consideri il sottospazio proiettivo di codimensione 2 avente equazione cartesiana

$$L : \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0 \end{cases}.$$

Allora il fascio di iperpiani di sostegno L è dato da

$$\mathcal{F}_L : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Esempio 3.4.3. Determinare tutti e soli gli iperpiani di \mathbb{P}^4 contenenti il sottospazio proiettivo $L = \mathbb{P}(W)$, dove W è il seguente sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 :

$$W = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0, 0) \rangle.$$

Si verifica che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$ (\textcircled{A}). Di conseguenza, $\dim L = 2$ e quindi $\text{codim } L = 2$, pertanto gli iperpiani richiesti costituiscono il fascio \mathcal{F}_L di iperpiani di \mathbb{P}^4 avente per sostegno L .

Troviamo l'equazione cartesiana di L col metodo descritto nell'Esempio 3.3.5, cioè imponiamo che il vettore $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia combinazione lineare dei generatori di W ovvero che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Per il *Teorema dei minori orlati*, basta orlare un minore non degenero 3×3 , ad esempio quello costituito dalle colonne 1 - 3 - 5 (intersecate con le righe 2-3-4): i minori *orlati* saranno dunque costituiti, rispettivamente, dalle colonne 1 - 2 - 3 - 5 e 1 - 3 - 4 - 5. I loro determinanti sono:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - x_1 - 2x_2, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_3.$$

Quindi

$$L : \begin{cases} 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\mathcal{F}_L : \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2) + \mu x_3 = 0.$$

3.5 Completamento di \mathbb{A}^n a \mathbb{P}^n

In questo paragrafo useremo queste notazioni: $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_K^n$, $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}_K^n$, dove K è un campo.

Definizione 3.5.1. Gli $n + 1$ iperpiani di \mathbb{P}^n

$$H_i : x_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

sono detti *iperpiani coordinati*.

Osservazione 3.5.1. Ogni spazio proiettivo \mathbb{P}^n con coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ può essere scritto come la seguente unione (disgiunta):

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0,$$

dove

$$H_0 := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\}, \quad U_0 := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}.$$

Ovviamente H_0 è il primo iperpiano coordinato.

Osservazione 3.5.2. La precedente decomposizione di \mathbb{P}^n può essere generalizzata a ogni iperpiano coordinato, cioè possiamo scrivere

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i,$$

dove

$$H_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0\}, \quad U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Considerando, ad esempio, la decomposizione $\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0$, mostriamo come costruire una corrispondenza biunivoca “naturale” tra U_0 e \mathbb{A}^n nei casi $n = 1$, $n = 2$ e per n qualunque.

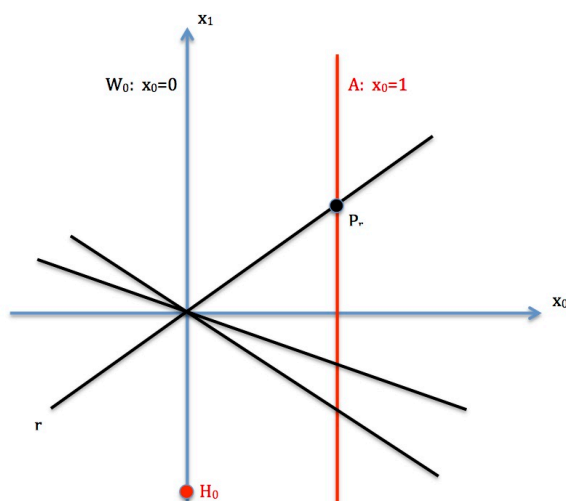
A tale scopo, si considereranno contemporaneamente \mathbb{P}^n e il corrispondente spazio vettoriale K^{n+1} , tenendo presente che ogni iperpiano di \mathbb{P}^n è il proiettivizzato di un iperpiano vettoriale di K^{n+1} . In particolare, l'iperpiano $H_0 \subset \mathbb{P}^n$ è il proiettivizzato dell'iperpiano $W_0 \subset K^{n+1}$, che ha anche'esso equazione $x_0 = 0$.

Completamento da \mathbb{A}^1 a \mathbb{P}^1

In questo caso, H_0 è il punto $[0, 1] \in \mathbb{P}^1$. In K^2 si considerino i seguenti sottoinsiemi $W_0 : x_0 = 0$ (retta vettoriale) e $A : x_0 = 1$ (retta affine).

Ogni retta vettoriale $r = \langle v \rangle = [v] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ interseca la retta A in uno e un solo punto, che denotiamo con P_r . Questo definisce l'applicazione

$$\alpha : \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset K^2 \quad \text{data da} \quad r \mapsto P_r := r \cap A.$$



Chiaramente α è biunivoca e, essendo la prima coordinata di ogni punto $r \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ non nulla, è definita da

$$r = [v_0, v_1] = \left[1, \frac{v_1}{v_0} \right] \mapsto P_r = \left(1, \frac{v_1}{v_0} \right) \in A.$$

Inoltre, definiamo la naturale applicazione (biunivoca)

$$\beta : A \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad (1, t) \mapsto t.$$

Pertanto la composizione

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad [v_0, v_1] \mapsto \frac{v_1}{v_0}$$

è ancora biunivoca e possiamo considerare la sua inversa che denotiamo con

$$j_0 : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad t \mapsto [1, t].$$

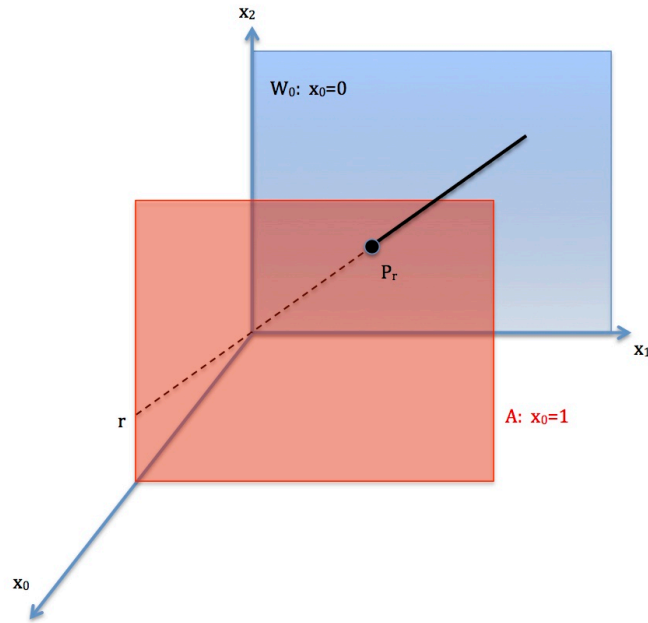
Tenendo conto delle notazioni introdotte nell'Osservazione 3.5.1, è chiaro che $j_0(\mathbb{A}^1) = U_0$ e si ha dunque

$$\mathbb{P}^1 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^1).$$

Definizione 3.5.2. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di \mathbb{P}^1 e che H_0 è il *punto all'infinito* di \mathbb{A}^1 (via l'immersione j_0).

Completamento da \mathbb{A}^2 a \mathbb{P}^2

In K^3 consideriamo il piano vettoriale $W_0 : x_0 = 0$ e il piano $A : x_0 = 1$



Si osservi che $H_0 = \mathbb{P}(W_0)$ e definiamo, come prima, l'applicazione biunivoca

$$\alpha : \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset K^3$$

definita da

$$r = [v_0, v_1, v_2] \mapsto P_r := r \cap A = \left(1, \frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}\right)$$

e anche l'applicazione (biunivoca)

$$\beta : A \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad (1, t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2).$$

Pertanto la composizione

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad [v_0, v_1, v_2] \mapsto \left(\frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}\right)$$

è ancora biunivoca. Si consideri la sua inversa

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad (t_1, t_2) \mapsto [1, t_1, t_2].$$

Si ha dunque

$$\mathbb{P}^2 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^2)$$

In questo caso l'iperpiano H_0 è una retta.

Definizione 3.5.3. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di \mathbb{P}^2 e che H_0 è la *retta all'infinito* o *retta impropria* di \mathbb{A}^2 (via l'immersione j_0). I suoi punti si dicono *punti impropri*.

Completamento da \mathbb{A}^n a \mathbb{P}^n

Quanto visto si generalizza naturalmente a una dimensione qualunque col seguente risultato la cui dimostrazione (una semplice verifica) è lasciata al lettore.

Proposizione 3.5.1. *Si consideri lo spazio affine \mathbb{A}^n con coordinate (y_1, \dots, y_n) e lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n con coordinate omogenee $[x_0, x_1, \dots, x_n]$.*

L'applicazione

$$j_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0 = U_0$$

definita da

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$$

è biunivoca e la sua inversa

$$j_0^{-1} : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

è definita da

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Definizione 3.5.4. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di \mathbb{P}^n e che H_0 è l'*iperpiano all'infinito* di \mathbb{A}^n (via j_0).

Osservazione 3.5.3. Tenendo conto dell'Osservazione 3.5.2, operando come nella costruzione appena vista, si possono introdurre le analoghe applicazioni biunivoche j_1, j_2, \dots, j_n

$$j_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_i = U_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e le corrispondenti carte affini

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} = j_i(\mathbb{A}^n) \cong \mathbb{A}^n.$$

Quindi

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i = H_i \cup j_i(\mathbb{A}^n) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e dunque \mathbb{A}^n si può immergere in \mathbb{P}^n in (almeno!) $n + 1$ modi.

Si osservi infine che

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$$

e tale scrittura viene detta *ricoprimento* di \mathbb{P}^n con carte affini (o *atlante affine*).

Osservazione 3.5.4. Nel seguito, utilizzeremo sempre il completamento di \mathbb{A}^n a \mathbb{P}^n mediante j_0 e, identificando in tal modo U_0 con \mathbb{A}^n , scriveremo con un leggero abuso di notazione

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n.$$

I punti di \mathbb{P}^n che sono affini si diranno *punti propri* mentre quelli appartenenti all'iperpiano H_0 sono *punti impropri*. In particolare, ogni punto di \mathbb{A}^n ha, oltre alle sue coordinate affini, anche delle coordinate omogenee. Viceversa, ogni punto di \mathbb{P}^n che abbia la prima coordinata omogenea non nulla, ha anche delle coordinate affini.

Il passaggio dalle coordinate affini a quelle omogenee (e viceversa) è determinato dalla Proposizione 3.5.1.

Esempio 3.5.1. Come visto, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup H_0$, dove $H_0 = \{[0, 1]\}$ consiste di un solo punto: il punto all'infinito della retta affine. Inoltre, se $P = (t) \in \mathbb{A}^1$, le sue coordinate omogenee sono $P = [1, t]$. Viceversa, se $Q = [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1$ e $x_0 \neq 0$, allora Q appartiene alla carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^1$. Qui ha coordinata $Q = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)$.

Esempio 3.5.2. Come sopra, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup H_0$, dove la retta all'infinito H_0 ha equazione $x_0 = 0$. Inoltre, se $P = (x, y) \in \mathbb{A}^2$, le sue coordinate omogenee sono $P = [1, x, y]$. Viceversa, se $Q = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$ e $x_0 \neq 0$, allora Q appartiene alla carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2$. Qui ha coordinate affini $Q = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$.

Chiusura proiettiva

In questa sezione utilizziamo le notazioni introdotte sopra, dunque le coordinate affini (y_1, y_2, \dots, y_n) di \mathbb{A}^n , le coordinate omogenee $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ di \mathbb{P}^n e il completamento

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n,$$

dove $H_0 : x_0 = 0$.

Definizione 3.5.5. Sia H l'iperpiano di \mathbb{A}^n di equazione

$$H : a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b = 0.$$

Diciamo *chiusura proiettiva* di H l'iperpiano di \mathbb{P}^n di equazione

$$\overline{H} : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b x_0 = 0.$$

Proposizione 3.5.2. Se H è un iperpiano di \mathbb{A}^n di chiusura proiettiva $\overline{H} \subset \mathbb{P}^n$, allora

$$H = \overline{H} \cap \mathbb{A}^n.$$

Inoltre $H_\infty := \overline{H} \setminus H$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 2 in \mathbb{P}^n e precisamente

$$H_\infty = \overline{H} \cap H_0.$$

Dimostrazione. Sia $H : a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b = 0$ e sia $P = (Y_1, \dots, Y_n)$ un punto di H . Dunque vale l'identità $a_1Y_1 + \dots + a_nY_n + b = 0$.

D'altra parte, per la Proposizione 3.5.1, le coordinate omogenee di P sono $[1, Y_1, \dots, Y_n]$ e quindi banalmente soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{H} : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + bx_0 = 0$.

Questo prova che $H \subset \overline{H}$ e quindi che $H \subset \overline{H} \cap \mathbb{A}^n$.

Viceversa, sia $P = (Y_1, \dots, Y_n) \in \overline{H} \cap \mathbb{A}^n$. Dunque le sue coordinate omogenee $[1, Y_1, \dots, Y_n]$ soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva \overline{H} , cioè vale l'identità $a_1Y_1 + \dots + a_nY_n + b = 0$. Questo equivale al fatto che le coordinate affini soddisfano l'equazione di H e quindi $P \in H$.

Resta da provare l'ultima affermazione, cioè che

$$\overline{H} \setminus H = \overline{H} \cap H_0.$$

Si osservi che

$$\overline{H} = \overline{H} \cap \mathbb{P}^n = \overline{H} \cap (\mathbb{A}^n \cup H_0) = (\overline{H} \cap \mathbb{A}^n) \cup (\overline{H} \cap H_0) = H \cup (\overline{H} \cap H_0)$$

dove l'ultima uguaglianza è stata provata sopra. Pertanto si ha la tesi. \square

Come conseguenza si ha dunque la decomposizione

$$\overline{H} = H \cup H_\infty$$

dove H è l'insieme dei punti propri di \overline{H} e H_∞ è l'insieme dei punti impropri di \overline{H} .

Definizione 3.5.6. Il sottospazio proiettivo H_∞ è detto *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di H .

Esercizio P3. Siano H un iperpiano di \mathbb{A}^n e T un iperpiano di \mathbb{P}^n . Provare che, se $H \subset T$, allora $T = \overline{H}$.

Osservazione 3.5.5. Se H è l'iperpiano di \mathbb{A}^n di equazione

$$H : a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b = 0$$

allora il suo sottospazio improprio è

$$H_\infty : \begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Esempio 3.5.3. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^2$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\overline{r} \subset \mathbb{P}^2$ e il suo punto improprio r_∞ , dove

$$r : 3x + 2y - 1 = 0.$$

Per quanto visto

$$\overline{r} : 3x_1 + 2x_2 - x_0 = 0$$

e

$$r_\infty : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow r_\infty = [0, 2, -3].$$

Esempio 3.5.4. Dato il piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{\pi} \subset \mathbb{P}^3$ e la sua retta impropria π_∞ (in equazione cartesiana e in equazione parametrica), dove

$$\pi : 3x + y - 5z + 3 = 0.$$

Per quanto visto

$$\bar{\pi} : 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_0 = 0$$

$$\pi_\infty : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = -3\lambda + 5\mu \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Dall'Osservazione 3.5.5 si ha il seguente fatto.

Corollario 3.5.3. *Due iperpiani paralleli H e H' di \mathbb{A}^n hanno lo stesso sottospazio improprio, i.e. $H_\infty = H'_\infty$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, gli iperpiani H e H' hanno equazioni del tipo

$$H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$$

e

$$H' : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b' = 0$$

Per l'Osservazione 3.5.5 si ha immediatamente la tesi. \square

Proposizione 3.5.4. *Se H è un iperpiano di \mathbb{A}^n di giacitura W allora*

$$H_\infty \cong \mathbb{P}(W).$$

Dimostrazione. Se $H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0 = 0$ allora per l'Osservazione 3.5.5

$$H_\infty : \begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

D'altra parte, la giacitura di H è il sottospazio vettoriale di K^n di equazione

$$W : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0$$

e le rette vettoriali di W sono del tipo $\langle v \rangle$, dove il vettore $v = (v_1, \dots, v_n)$ verifica l'uguaglianza $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$. Quindi è naturale definire

$$\alpha : H_\infty \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

in questo modo: per ogni punto $P = [0, x_1, \dots, x_n] \in H_\infty$ (cioè tale che $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$) si pone $\alpha(P) := [x_1, \dots, x_n]$. Si verifica immediatamente che α è ben definita (cioè non dipende dalla scelta del rappresentante delle coordinate omogenee di P) ed è biunivoca. \square

La nozione di chiusura proiettiva si generalizza in modo naturale a un qualunque sottospazio affine.

Ricordando il sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X (vedi Definizione 3.1.7), introduciamo la seguente nozione.

Definizione 3.5.7. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine. Si dice *chiusura proiettiva* di S il sottospazio proiettivo $L(S)$ e si denota con \bar{S} , i.e.

$$\bar{S} := \bigcap_{\mathbb{P}(U) \supset S} \mathbb{P}(U).$$

Si dice inoltre *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di S l'insieme

$$S_\infty := \bar{S} \setminus S.$$

Dall'Esercizio P3 segue facilmente (⊗) che, nel caso in cui S stesso sia un iperpiano, la definizione di chiusura proiettiva data sopra coincide con quella data nella Definizione 3.5.6.

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente utile risultato.

Proposizione 3.5.5. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine e siano H_1, \dots, H_s iperpiani tali che $S = H_1 \cap \dots \cap H_s$. Allora la chiusura proiettiva di S è il sottospazio proiettivo

$$\bar{S} = \bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_s.$$

Inoltre il sottospazio all'infinito di S è

$$S_\infty = (H_1)_\infty \cap \dots \cap (H_s)_\infty = \mathbb{P}(W),$$

dove W è la giacitura di S .

Esempio 3.5.5. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{r} \subset \mathbb{P}^3$ e il suo punto improprio r_∞ , dove

$$r : \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Per la Proposizione 3.5.5 si ha

$$\bar{r} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_0 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_0 = 0 \end{cases}$$

e

$$r_\infty : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -3x_1 \end{cases}$$

e quindi $r_\infty = [0, 1, -2, -3]$.

Esercizio P4. Generalizzare il Corollario 3.5.3 a sottospazi affini di qualunque dimensione, cioè se $S, T \subset \mathbb{A}^n$ sono due sottospazi affini paralleli con $\dim S \leq \dim T$ allora $S_\infty \subseteq T_\infty$.

Fasci proiettivizzati

Nel Capitolo 1 abbiamo trattato i fasci di iperpiani nello spazio affine \mathbb{A}^n , suddividendoli in “propri” e “impropri”: i primi avevano in comune un sottospazio affine di codimensione 2 (ad esempio, i fasci propri di rette nel piano di centro un punto) e i secondi avevano in comune una giacitura (ad esempio, un fascio improprio di rette nel piano, tutte parallele a una retta data). Tale distinzione viene a cessare nella Geometria Proiettiva.

Definizione 3.5.8. Sia \mathcal{F} un fascio di iperpiani in \mathbb{A}^n . Diciamo suo *fascio proiettivizzato* l'insieme di iperpiani di \mathbb{P}^n dato da

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{H} \subset \mathbb{P}^n \mid H \in \mathcal{F}\}.$$

Osservazione 3.5.6. Se \mathcal{F} è un fascio proprio di iperpiani di sostegno un sottospazio affine L (con $\text{codim}(L) = 2$) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno \overline{L} .

Se invece \mathcal{F} è un fascio improprio di iperpiani di giacitura W (con W iperpiano vettoriale di K^n) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\mathbb{P}(W) \subset H_0$.

Esempio 3.5.6. Si consideri il fascio di rette in \mathbb{A}^2 dato da

$$\mathcal{F}: \lambda(x + y - 3) + \mu(2x - y) = 0$$

e sia $\overline{\mathcal{F}}$ il suo fascio proiettivizzato. Determinare una equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ (in coordinate omogenee) e il suo centro.

Chiaramente $\overline{\mathcal{F}}$ ha come generatori le chiusure proiettive dei generatori di \mathcal{F} e dunque l'equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ in \mathbb{P}^2 è

$$\overline{\mathcal{F}}: \lambda(x_1 + x_2 - 3x_0) + \mu(2x_1 - x_2) = 0.$$

Pertanto il centro di $\overline{\mathcal{F}}$ è il punto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = [1, 1, 2].$$

Esempio 3.5.7. Come l'esercizio precedente, ma riguardo al fascio di piani in \mathbb{A}^3 (con coordinate affini (x, y, z)) dato da

$$\mathcal{F}: x + y + z = 0.$$

Conviene scrivere \mathcal{F} utilizzando due parametri omogenei invece dell'unico parametro non omogeneo, cioè $\mathcal{F}: \lambda(x + y) + \mu z = 0$. Dunque

$$\overline{\mathcal{F}}: \lambda(x_1 + x_2) + \mu x_0 = 0.$$

Pertanto il sostegno di $\overline{\mathcal{F}}$ è la retta r intersezione dei 2 piani generatori

$$r: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Si noti che r non è la proiettivizzata di alcuna retta dello spazio affine, in quanto essa giace nel piano all'infinito.

(Scrivere una equazione parametrica di r \textcircled{A}).

3.6 Proiettività

Introduciamo ora le applicazioni “opportune” nella categoria degli spazi proiettivi.

Definizione 3.6.1. Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi della stessa dimensione. Diciamo che un'applicazione

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

è un *isomorfismo proiettivo* se esiste un isomorfismo di K -spazi vettoriali $\varphi : V \longrightarrow V'$ tale che, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$f(\langle v \rangle) = \langle \varphi(v) \rangle.$$

Equivalentemente, posta $\pi : V \setminus \{0_V\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva definita da $\pi(v) = \langle v \rangle$ (e definita analogamente π'), f è un isomorfismo proiettivo se il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0_V\} & \xrightarrow{\varphi} & V' \setminus \{0_{V'}\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}(V') \end{array}$$

è commutativo. Diremo inoltre che f è l'*isomorfismo proiettivizzato* di φ o che è *indotto da* φ . Scriveremo anche $f = \overline{\varphi}$.

Chiaramente f è univocamente individuato da φ , ma non viceversa, come vedremo.

Esercizio P5. Provare che un isomorfismo proiettivo è ben definito ed è biiettivo.

Definizione 3.6.2. Due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo proiettivo $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$. In tal caso scriveremo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V')$.

Esercizio P6. Provare che la composizione di isomorfismi proiettivi è ancora un isomorfismo proiettivo e precisamente che $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = \overline{\varphi \circ \psi}$.

Provare inoltre che se f è un isomorfismo proiettivo, anche f^{-1} lo è e precisamente che $(\overline{\varphi})^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$.

Proposizione 3.6.1. Se $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n allora $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}_K^n$.

Dimostrazione. Per un noto risultato di Algebra Lineare, $V \cong K^{n+1}$, cioè esiste un isomorfismo di K -spazi vettoriali $\varphi : V \longrightarrow K^{n+1}$. Se $f := \overline{\varphi}$, allora $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$ è un isomorfismo proiettivo, come volevamo. \square

Per come è definito un isomorfismo proiettivo indotto da un isomorfismo lineare, si ha facilmente il seguente fatto.

Osservazione 3.6.1. Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ un isomorfismo di K -spazi vettoriali. Allora, per ogni $\lambda \in K^*$, gli isomorfismi φ e $\lambda\varphi$ inducono lo stesso isomorfismo proiettivo, i.e.

$$\overline{\varphi} = \overline{\lambda\varphi}.$$

Infatti, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$, si ha che

$$\langle \varphi(v) \rangle = \langle \lambda\varphi(v) \rangle$$

in quanto φ è lineare (la verifica è lasciata per esercizio).

È naturale chiedersi se valga il viceversa. La risposta è affermativa, ma non immediata, come mostra il seguente risultato.

Teorema 3.6.2. Siano $\varphi, \psi : V \rightarrow V'$ due isomorfismi di K -spazi vettoriali. Se $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$ come isomorfismi proiettivi da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V')$, allora esiste $\lambda \in K^*$ tale che

$$\psi = \lambda\varphi.$$

Dimostrazione. Per ipotesi e per definizione, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ si ha

$$\langle \varphi(v) \rangle = \overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \overline{\psi}(\langle v \rangle) = \langle \psi(v) \rangle.$$

Pertanto esiste uno scalare $\lambda_v \in K^*$, dipendente da v , tale che

$$\psi(v) = \lambda_v \varphi(v).$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri si ottiene

$$\varphi^{-1}(\psi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda_v \varphi(v)) = \lambda_v v.$$

Quindi v è un autovettore di $\varphi^{-1} \circ \psi$: ciò accade per ogni $v \in V$ e dunque, necessariamente, $\varphi^{-1} \circ \psi$ è un'omotetia. Dunque esiste $\lambda \in K^*$ (indipendente da v) tale che $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \text{Id}_V$, da cui $\psi = \lambda\varphi$, come volevamo. \square

Come abbiamo fatto per gli spazi affini, focalizzeremo la nostra attenzione a isomorfismi che hanno uguale dominio e codominio. La nozione analoga all'affinità (introdotta nel Capitolo 1) è dunque la seguente.

Definizione 3.6.3. Si dice *proiettività* di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ un isomorfismo proiettivo

$$f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V).$$

È evidente che $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è una proiettività. Dunque per l'Esercizio P6 si ha immediatamente che l'insieme

$$\{f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V) \mid f \text{ è una proiettività}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione.

Definizione 3.6.4. Tale gruppo si dice *gruppo delle proiettività* di $\mathbb{P}(V)$ e si denota con $PGL(\mathbb{P}(V))$. In particolare, invece di $PGL(\mathbb{P}_K^n)$, scriveremo $PGL(n+1, K)$ che viene detto *gruppo proiettivo lineare generale*.

Proposizione 3.6.3. Se V è un K -spazio vettoriale, l'applicazione

$$\alpha : GL(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}(V)) \quad \text{data da} \quad \varphi \mapsto \bar{\varphi}$$

è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Inoltre $\ker(\alpha) = Om(V)$, il gruppo delle omotetie di V . Conseguentemente

$$PGL(\mathbb{P}(V)) \cong GL(V)/Om(V).$$

Dimostrazione. Poiché, per definizione, ogni proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è individuata da un isomorfismo lineare di V , l'applicazione α è suriettiva.

Inoltre, per l'Esercizio P6, α è un omomorfismo di gruppi.

Resta da determinare il suo nucleo, cioè

$$\ker(\alpha) = \{\varphi \in GL(V) \mid \bar{\varphi} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}\}.$$

È evidente che $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)} = \overline{\text{Id}_V}$. Quindi, per l'Osservazione 3.6.1 e il Teorema 3.6.2, si ha che

$$\bar{\varphi} = \overline{\text{Id}_V} \iff \exists \lambda \in K^* \mid \varphi = \lambda \text{Id}_V \iff \varphi \in Om(V).$$

□

Il problema di determinare le equazioni di una proiettività è facilmente risolvibile: basti pensare che ogni $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$ è del tipo $f = \bar{\varphi}$ per un'opportuna $\varphi \in GL(V)$. Nel caso particolare (che non è restrittivo, per la Proposizione 3.6.1) in cui $V = K^{n+1}$ e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_K^n$, l'omomorfismo α si esplicita come

$$\alpha : GL(n+1, K) \longrightarrow PGL(n+1, K) \quad \text{data da} \quad M \mapsto [M].$$

Se, fissata una base \mathcal{B} di V e posta $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, l'equazione di φ è

$$Y = MX,$$

allora l'equazione di $f = \bar{\varphi}$ (rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{B} di $\mathbb{P}(V)$) è

$$\rho Y = MX$$

dove $\rho \in K^*$. Diremo che A è la *matrice associata a f rispetto al riferimento \mathcal{B}* , intendendo che è determinata a meno di una costante non nulla (più precisamente a f è associata una classe di equivalenza $[M]$ di matrici, tutte proporzionali a M).

Esempio 3.6.1. Determinare tutte e sole le proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tali che $f(A_i) = B_i$, con $i = 1, 2, 3$, dove

$$A_1 = [1, 0, 0], \quad A_2 = [0, 1, 0], \quad A_3 = [0, 0, 1]$$

$$B_1 = [1, 1, 0], \quad B_2 = [1, 0, 1], \quad B_3 = [0, 1, 1].$$

Per determinare una matrice $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ associata a f , imponiamo le 3 condizioni precedenti sulla generica matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cioè (intendendo le coordinate dei punti scritte per colonne):

$$\rho B_i = M A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ad esempio, dalla prima si ha

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

In modo analogo si impongono le altre due condizioni, ottenendo

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

In tal modo si è determinata una famiglia di ∞^3 matrici che soddisfano i requisiti richiesti. Di conseguenza tutte le proiettività cercate costituiscono la famiglia di ∞^2 elementi

$$\left\{ [M] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

La domanda che nasce naturalmente dal precedente Esempio è: quanti punti sono necessari per individuare univocamente una proiettività?

La risposta è nel seguente risultato, analogo a quello della *Determinazione di un'affinità mediante punti* (vedi Capitolo 1, Teorema 1.11.6).

Teorema 3.6.4 (Teorema fondamentale sulle proiettività).

Si considerino due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, entrambi di dimensione n . Se $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ e $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(V')$ sono due $(n+2)$ -uple di punti in posizione generale, allora esiste un'unico isomorfismo proiettivo

$$f: \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'esistenza di f .

Siano $v_i \in V$ e $w_i \in V'$ vettori tali che $P_i = [v_i]$ e $Q_i = [w_i]$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n+1$. Per ipotesi, v_0, \dots, v_n sono una base di V e quindi si può scrivere

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \quad (3.3)$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Analogamente

$$w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n \quad (3.4)$$

dove i μ_i sono tutti non nulli.

Siano ora $\mathcal{B} := (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$ e $\mathcal{B}' := (\mu_0 w_0, \dots, \mu_n w_n)$: chiaramente sono ancora basi di V e V' , rispettivamente. Per un noto risultato di Algebra Lineare, esiste un unico isomorfismo di K -spazi vettoriali

$$\varphi : V \longrightarrow V' \quad \text{tale che} \quad \varphi(\lambda_i v_i) = \mu_i w_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Di conseguenza, per (3.3) e (3.4), vale anche

$$\varphi(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Pertanto, posto $f := \overline{\varphi}$, si ha che f è un isomorfismo proiettivo e verifica

$$f(P_i) = Q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n+1.$$

Proviamo ora l'unicità di f .

Supponiamo che esista un isomorfismo proiettivo

$$f' : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f'(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Poniamo $g := (f')^{-1} \circ f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$. Se mostriamo che $g = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, concluderemo che $f' = f$.

A tale scopo, osserviamo dapprima che, per l'Esercizio P6, g risulta una proiettività e quindi è indotta da un automorfismo ψ di V . Equivalentemente, $g = \overline{\psi}$. Si noti che $g(P_i) = P_i$, per $i = 0, 1, \dots, n+1$ e questo implica che $\psi(v_i) = \rho_i v_i$, per opportuni scalari $\rho_i \in K^*$, per $i = 0, 1, \dots, n+1$.

In particolare, $\psi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1}$. Inoltre,

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \quad (3.5)$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Quindi, per la linearità di ψ si ottiene

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) &= \psi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) = \\ &= \lambda_0 \rho_0 v_0 + \dots + \lambda_n \rho_n v_n. \end{aligned}$$

D'altra parte, sempre da (3.5), si ha

$$\begin{aligned}\psi(v_{n+1}) &= \rho_{n+1}v_{n+1} = \rho_{n+1}(\lambda_0v_0 + \cdots + \lambda_nv_n) = \\ &= \lambda_0\rho_{n+1}v_0 + \cdots + \lambda_n\rho_{n+1}v_n.\end{aligned}$$

Confrontando le due precedenti espressioni di $\psi(v_{n+1})$ e tenendo conto del fatto che v_0, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_0\rho_0 &= \lambda_0\rho_{n+1} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n\rho_n &= \lambda_n\rho_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 - \rho_{n+1} &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ \rho_n - \rho_{n+1} &= 0 \end{cases}$$

dove l'implicazione segue dal fatto che i λ_i sono tutti non nulli. Quindi tutti i ρ_i coincidono e ponendo

$$\rho := \rho_0 = \cdots = \rho_{n+1},$$

si ha che $\psi(v_i) = \rho v_i$, per ogni i . Di conseguenza, $\psi = \rho \text{Id}_V$ è un'omotetia e quindi $g = \bar{\psi} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, come volevamo. \square

Esempio 3.6.2. Dal precedente teorema segue che per determinare una proiettività di \mathbb{P}^n servono due $n+2$ -uple di punti in posizione generale. Ad esempio, per determinare una proiettività di \mathbb{P}^2 servono due quaterne di punti in posizione generale.

Consideriamo la situazione dell'Esempio 3.6.1: abbiamo determinato tutte le proiettività f di \mathbb{P}^2 tali che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3$. Se alle 2 terne date aggiungiamo $A_4 = [1, 1, 1] = B_4$, poiché le due quaterne A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1, B_2, B_3, B_4 sono in posizione generale, troveremo un'unica proiettività tale che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Chiaramente basta imporre l'ultima condizione $f(A_4) = B_4$ alla famiglia determinata nell'Esempio 3.6.1, che risultava essere costituita dalle matrici

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

Tale condizione si esprime imponendo

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + \sigma \\ \rho + \tau \\ \sigma + \tau \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = \sigma = \tau.$$

Pertanto le matrici richieste sono

$$M = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che è associata a un'unica proiettività di \mathbb{P}^2 (come affermato dal Teorema 3.6.4).

Osservazione 3.6.2. (*non banale*) Si confronti il Teorema 3.2.2 col Teorema 3.6.4 (e tenendo presente il Teorema 3.6.2). Il primo si può riformulare dicendo che la scelta di un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ equivale alla scelta di un isomorfismo proiettivo $\rho: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che mette in corrispondenza i rispettivi punti fondamentali ed i punti unità, che a sua volta equivale alla scelta dei punti fondamentali (ordinati) e del punto unità.

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 3.6.5. Due sottoinsiemi X e X' di \mathbb{P}^n si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività f di \mathbb{P}^n tale che $f(X) = X'$.

Dal Teorema fondamentale sulle proiettività segue immediatamente questo risultato.

Corollario 3.6.5. *Due r -uple di punti di \mathbb{P}^n in posizione generale sono proiettivamente equivalenti se $1 \leq r \leq n + 2$.*

