

Geometria 2

Anno accademico 2023-2024

Foglio di esercizi n.8

3 maggio 2024

- 1) Si scriva l'equazione del fascio \mathcal{F} di rette di centro $[2, -2 + i, 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Determinare la retta $r \in \mathcal{F}$ che passa per il punto $[1, 1, 1]$. Determinare anche le equazioni cartesiane del fascio e della retta in questione nel piano affine (a meno di j_0).
- 2) Si scriva l'equazione del fascio \mathcal{F} di rette di centro $[0, 4, 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Determinare la retta $r \in \mathcal{F}$ che passa per il punto $[-3, 0, 2]$. Determinare anche le equazioni cartesiane del fascio e della retta in questione nel piano affine (a meno di j_0).
- 3) Determinare la chiusura proiettiva della retta $t: 3ix - 2y - i + 1 = 0$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ e calcolare le coordinate omogenee del suo punto improprio.
- 4) In $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ si consideri il piano L passante per i punti $[1, -1, 0, 0]$, $[1, 1, 1, 0]$ e $[2, 1, 0, -2]$. Determinare l'equazione di L e della sua parte affine (cioè $L \cap \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ a meno di j_0).
- 5) Siano $S, T \subset \mathbb{A}^n$ due sottospazi affini e $\overline{S}, \overline{T} \subset \mathbb{P}^n$ le rispettive chiusure proiettive. Provare che $S \subseteq T$ implica $\overline{S} \subseteq \overline{T}$. Provare inoltre che $S_{\infty} \subseteq T_{\infty}$.
- 6) Dimostrare che ogni $g \in \text{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ ha almeno un punto fisso.
- 7) Dimostrare che ogni $g \in \text{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ ammette almeno un punto fisso se n è pari.
- 8) Trovare controesempi all'esercizio precedente per ogni n dispari.
- 9) Si consideri la proiettività $f \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i punti fissi di f . Scrivere la matrice di f rispetto ad un sistema di riferimento proiettivo nel quale i punti fondamentali sono i punti fissi (il punto unità può essere scelto arbitrariamente).

- 10) Consideriamo l'immersione $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ data da j_0 e sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n)$. Dimostrare che esiste un'unica proiettività $\widehat{f} \in \text{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ che estende f e se ne determini la matrice in un opportuno riferimento proiettivo. Dedurne che esiste un monomorfismo di gruppi $\psi: \text{Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n) \rightarrow \text{PGL}(n+1, \mathbb{K})$.
Viceversa, data $g \in \text{PGL}(n+1, \mathbb{K})$, dire sotto quali condizioni esiste $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n)$ tale che $g = \widehat{f}$, e nel caso determinarne le equazioni.