# Teorema di Green / Esercizi svolti

**ESERCIZIO.** *Utilizzando il teorema di Green, calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale*

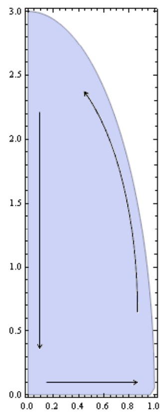
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{x^2} - y, \frac{x^4}{4} + e^y\right)$$

*lungo la frontiera dell'insieme* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$, *percorsa in verso antiorario.*

**Svolgimento.** L'insieme $D$ è dato dall'intersezione dei due insiemi rappresentati dalle seguenti disequazioni:

$9x^2 + y^2 \le 9 \quad \to \quad$ interno dell'ellisse $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ di semiassi $a = 1$ e $b = 3$, ellisse inclusa;

$x \ge 0,\ y \ge 0 \quad \to \quad 1°$ quadrante, semiassi coordinati inclusi.




Il verso antiorario (segnato in figura) è il verso di percorrenza positivo di $\partial D$ (lascia $D$ a sinistra), quindi il teorema di Green assicura che[1]

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dP = + \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4}{4} + e^y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2} - y\right)\right) dxdy = \int_D \left(x^3 + 1\right) dxdy.$$

Per calcolare l'integrale doppio, esprimiamo il settore ellittico $D$ in coordinate polari ellittiche con parametri $a = 1$ e $b = 3$: risulta

$$D = \left\{(t\cos\theta, 3t\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dP &= \int_D \left(x^3 + 1\right) dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(t^3 \cos^3\theta + 1\right) 3t\, dtd\theta = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(t^4 \cos^3\theta + t\right) dtd\theta \\
&= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 t^4 \cos^3\theta\, dtd\theta + 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 t\, dtd\theta = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \int_0^1 t^4 dt + 3 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 t\, dt \\
&= 3 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left(1 - \sin^2\theta\right) d\theta \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 + 3\frac{\pi}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{5} \int_0^{\pi/2} \left(\cos\theta - \cos\theta \sin^2\theta\right) d\theta + \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

[1] Come è d'uso, si sottintendono i seguenti passaggi: $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dP = \int_{\partial(D^\circ)} \mathbf{F} \cdot dP = + \int_{D^\circ} \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dxdy = + \int_D \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dxdy$, che valgono perché $D^\circ$ è un dominio di Green, $\partial D = \partial(D^\circ)$ e $D^\circ$ e $D$ differiscono per un insieme di area nulla (cioè $\partial D$).

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{5}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{5}\left([\sin\theta]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{5}$$

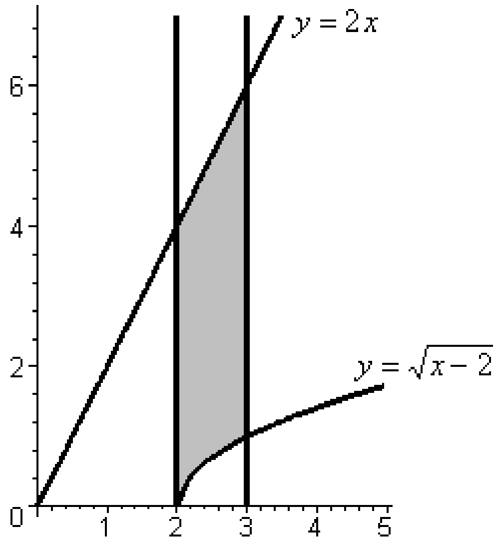
dove la sostituzione $dxdy = 3t\, dtd\theta$ tiene conto del termine jacobiano e si è usata l'identità $\cos^3\theta = \cos\theta\cos^2\theta = \cos\theta\left(1 - \sin^2\theta\right)$.

**ESERCIZIO.** *Utilizzando il teorema di Green, calcolare l'integrale di linea* $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\tau\, ds$ *dove*

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(2xy^2 + \frac{\sqrt[4]{\log\left(16+x^4\right)}}{x^4}\right)\mathbf{i} + \left(-x^3y + \arctan\frac{2y^4}{\sqrt{32+y^4}}\right)\mathbf{j}$$

*e* $\Gamma$ *è la frontiera dell'insieme* $T = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x\le 3,\ \sqrt{x-2}\le y\le 2x\right\}$*, percorsa in verso orario.*

**Svolgimento.** L'insieme $T$ è rappresentato in figura.




Poiché il verso orario di $\Gamma = \partial T$ è negativo (lascia $T$ a destra), per il teorema di Green[2] risulta

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\tau\, ds = -\int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

dove $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j}$ con

$$F_1(x,y) = 2xy^2 + \frac{\sqrt[4]{\log\left(16+x^4\right)}}{x^4}$$

e

$$F_2(x,y) = -x^3y + \arctan\frac{2y^4}{\sqrt{32+y^4}}.$$

Allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = -3x^2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 4xy$$

e quindi, integrando su $T$ per verticali, si ottiene

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\tau\, ds = -\int_T \left(-3x^2y - 4xy\right) dxdy = \int_T \left(3x^2+4x\right) y\,dxdy = \int_2^3 \left(\int_{\sqrt{x-2}}^{2x} \left(3x^2+4x\right) y\,dy\right) dx$$
$$= \int_2^3 \left(3x^2+4x\right)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x-2}}^{y=2x} dx = \int_2^3 \left(3x^2+4x\right)\left[2x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right] dx$$
$$= \int_2^3 \left(6x^4 + \frac{13}{2}x^3 + x^2 + 4x\right) dx = \left[\frac{6}{5}x^5 + \frac{13}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{45019}{120}.$$

[2] applicato al dominio di Green $D = T^\circ$, per il quale risulta $\partial D = \partial T$ e $\overline{D} = T$

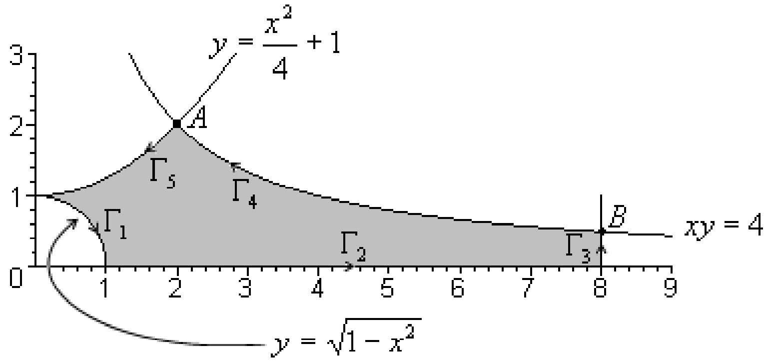
**ESERCIZIO.** *Tramite il teorema di Green, calcolare l'area dell'insieme*

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\, xy \leq 4,\, 0 \leq x \leq 8,\, 0 \leq y \leq \frac{x^2}{4} + 1 \right\}.$$

**Svolgimento.** Osserviamo innanzitutto che $E$ è contenuto nel I quadrante ($0 \leq x$ e $0 \leq y$), in cui è ottenibile come intersezione tra:

- l'esterno $x^2 + y^2 \geq 1$ della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, circonferenza inclusa;
- la regione $xy \leq 4$ che ha per frontiera l'iperbole $xy = 4$ e contiene gli assi;
- il semipiano $x \leq 8$;
- la regione $y \leq x^2/4 + 1$ che ha per frontiera la parabola $y = x^2/4 + 1$ e contiene l'asse $x$.

Come risultato si ottiene l'insieme ombreggiato in figura.




Sono note diverse formule che derivano dal teorema di Green e forniscono l'area di un dominio di Green (o della sua chiusura), ma, per esercizio, ripetiamo il semplice ragionamento che porta alle formule stesse. Dato un qualsiasi campo vettoriale $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ di classe $C^1$ su $E$ (cioè su un qualche aperto contenente $E$), il teorema di Green[3] assicura che

$$\int_E \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \right) dxdy = \int_{\partial E} \mathbf{F}(P) \cdot dP, \tag{0.1}$$

dove il lavoro a secondo membro è calcolato lungo la frontiera $\partial E$ *orientata positivamente*, cioè secondo la percorrenza che lascia localmente l'interno di $E$ alla sinistra. Per calcolare l'area $|E| = \int_E dxdy$ di $E$ tramite la (0.1), occorre procurarsi un campo vettoriale $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ (di classe $C^1$ su $E$) tale che la funzione sotto l'integrale a primo membro sia costante su $E$, cioè

$$\forall (x, y) \in E, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = k\,. \tag{0.2}$$

La scelta può essere fatta in infiniti modi; ad esempio, scegliendo per comodità $F_1$ identicamente nulla

[3] applicato al dominio di Green $D = E^\circ$, per il quale risulta $\partial D = \partial E$ e $\overline{D} = E$

su tutto il piano, la condizione (0.2) si riduce a

$$\forall\,(x,y)\in E,\qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\,(x,y)=k$$

che è banalmente soddisfatta dalla funzione $F_2\,(x,y)=x$, con $k=1$. Dunque il campo $\mathbf{F}\,(x,y)=(0,x)$ (ben definito e di classe $C^\infty$ su $\mathbb{R}^2$) risponde a tutte le richieste[4], cosicché, valendo la (0.2) con $k=1$, la (0.1) diventa

$$\int_E dxdy=\int_{\partial E}(0,x)\cdot dP\,,$$

ossia

$$|E|=\int_{\partial E}(0,x)\cdot dP\,, \tag{0.3}$$

dove, ricordiamo, la frontiera $\partial E$ deve essere *orientata positivamente*, cioè secondo la percorrenza che lascia localmente l'interno di $E$ alla sinistra.

Riferendosi d'ora in poi ai nomi introdotti in figura, la frontiera di $E$ è ovviamente l'unione dei cinque tratti regolari $\Gamma_1,...,\Gamma_5$ e si ha

$$\int_{\partial E}(0,x)\cdot dP=\sum_{i=1}^{5}\int_{\Gamma_i}(0,x)\cdot dP\,, \tag{0.4}$$

dove i tratti $\Gamma_i$ vanno orientati secondo gli orientamenti compatibili che danno l'orientamento positivo di $\partial E$, come evidenziato in figura.

Per calcolare i cinque lavori a secondo membro, occorre procurarsi una parametrizzazione di ciascuno dei tratti $\Gamma_i$, di cui $\Gamma_2,\Gamma_3$ sono segmenti paralleli agli assi (che si parametrizzano banalmente), $\Gamma_1$ è un arco di circonferenza di raggio 1 (a cui si addice una parametrizzazione polare) e $\Gamma_4,\Gamma_5$ sono grafici (che si parametrizzano in modo standard). Indicando con $(x_A,y_A)$ e $(x_B,y_B)$ le coordinate dei punti $A$ e $B$ in figura, si ha allora

- $\Gamma_1=\operatorname{im}\gamma_1$ con $\gamma_1:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ definita da

$$\gamma_1:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\qquad\text{con } t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

- $\Gamma_2=\operatorname{im}\gamma_2$ con $\gamma_2:[1,8]\to\mathbb{R}$ definita da

$$\gamma_2:\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}\qquad\text{con } t\in[1,8]$$

- $\Gamma_3=\operatorname{im}\gamma_3$ con $\gamma_3:[0,y_B]\to\mathbb{R}$ definita da

$$\gamma_3:\begin{cases}x=8\\ y=t\end{cases}\qquad\text{con } t\in[0,y_B]$$

[4] lo stesso vale ad esempio per i campi $\mathbf{F}_1\,(x,y)=(-y,0)$ e $\mathbf{F}_2\,(x,y)=(-y/2,x/2)$

- $\Gamma_4 : y = 4/x$ per $x \in [x_A, 8]$, cioè $\Gamma_4 = \operatorname{im} \gamma_4$ con $\gamma_4 : [x_A, 8] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma_4 : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{4}{t} \end{cases} \quad \text{con } t \in [x_A, 8]$$

- $\Gamma_5 : y = x^2/4 + 1$ per $x \in [0, x_A]$, cioè $\Gamma_5 = \operatorname{im} \gamma_5$ con $\gamma_5 : [0, x_A] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma_5 : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{4} + 1 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, x_A] \ .$$

Determiniamo le coordinate $x_A$ e $y_B$. Poichè $A$ è l'unica intersezione tra l'iperbole $\Gamma_4$ e la parabola $\Gamma_5$, le sue coordinate sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 4/x \\ y = x^2/4 + 1. \end{cases} .$$

Sostituendo, si ricava l'equazione $x^2/4+1 = 4/x$, ossia $x^3+4x-16 = 0$, che è risolta per $x = 2$. Dunque $x_A = 2$ (e $y_A = 2$). Circa il punto $B$, dal sistema

$$\begin{cases} y = 4/x \\ x = 8 \end{cases}$$

si ottiene subito $y_B = 4/8 = 1/2$.

Calcoliamo ora i cinque integrali a secondo membro della (0.4).

- Poiché $\gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (0, x) \cdot dP &= -\int_0^{\pi/2} (0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = -\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

  dove il segno $-$ davanti al secondo integrale è dovuto al fatto che, al crescere del parametro $t$, il punto $\gamma_1(t)$ si muove da $\gamma_1(0) = (1, 0)$ a $\gamma_1(\pi/4) = (0, 1)$, cioè in disaccordo con il verso di percorrenza stabilito su $\Gamma_1$.

- Anche la parametrizzazione $\gamma_4$ è discorde rispetto all'orientamento di $\Gamma_4$ e quindi, essendo $\gamma_4'(t) = \left(1, -4/t^2\right)$, si ottiene

$$\int_{\Gamma_4} (0, x) \cdot dP = -\int_2^8 (0, t) \cdot \left(1, -4/t^2\right) dt = -\int_2^8 t \left(-\frac{4}{t^2}\right) dt = 4 \int_2^8 \frac{1}{t} dt = 4 \left[\log t\right]_2^8 = 8 \log 2 \, .$$

- Analogamente, essendo $\gamma_5$ discorde con l'orientamento di $\Gamma_5$ e tale che $\gamma_5'(t) = (1, t/2)$, si ricava

$$\int_{\Gamma_5} (0, x) \cdot dP = -\int_0^2 (0, t) \cdot (1, t/2)\, dt = -\int_0^2 t \frac{t}{2} dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \, .$$

- Siccome $\gamma_2'(t) = (1,0)$, si ha subito $(0,x)\cdot\gamma_2'(t) = (0,x)\cdot(1,0) = 0$ e quindi

$$\int_{\Gamma_2} (0,x)\cdot dP = 0\,.$$

- La parametrizzazione $\gamma_3$ è concorde con l'orientamento di $\Gamma_3$ ed è tale che $\gamma_3'(t) = (0,1)$, per cui

$$\int_{\Gamma_3} (0,x)\cdot dP = +\int_0^{1/2} (0,8)\cdot(0,1)\,dt = \int_0^{1/2} 8dt = 4\,.$$

Sostituendo i risultati ottenuti nella (0.4) e ricordando la (0.3), si conclude

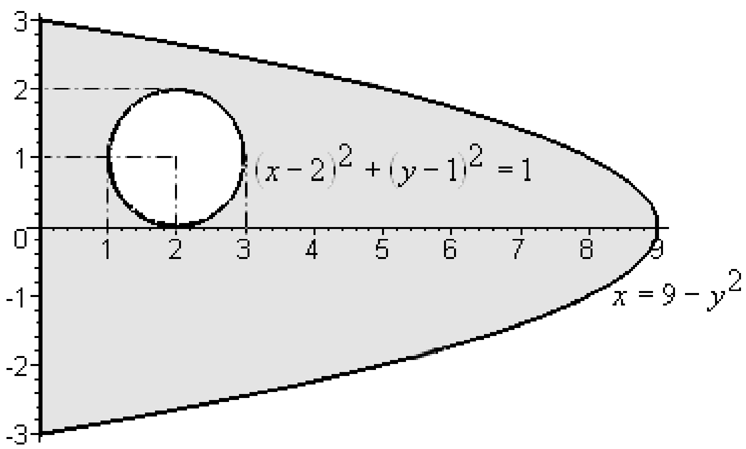
$$|E| = -\frac{\pi}{4} + 0 + 4 + 8\log 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{4} + 8\ln 2.$$

**ESERCIZIO.** *Utilizzando il teorema di Green, calcolare l'integrale*

$$\int_A \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy \tag{0.5}$$

*dove* $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 9 - y^2,\ (x-2)^2 + (y-1)^2 \ge 1\right\}$.

**Svolgimento.** Innanzitutto, osserviamo che $A$ è individuato dall'intersezione tra il semi-piano $x \ge 0$, il sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalla parabola $x = 9 - y^2$ e l'esterno della circonferenza $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.




Circonferenza e parabola non si intersecano in quanto il sistema

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x = 9 - y^2 \end{cases}$$

non ha soluzioni reali. Ciò non è di facile verifica algebrica ma può essere dedotto geometricamente, osservando che in corrispondenza di ascisse $x \in [1,3]$ (intervallo su cui si proietta la circonferenza) i punti sulla circonferenza hanno ordinate $y$ comprese tra 0 e 2, mentre quelli sulla parabola hanno ordinate che soddisfano $1 \leq 9-y^2 \leq 3$, cioè $6 \leq y^2 \leq 8$, il che implica in particolare $y > \sqrt{6} > 2$ oppure $y < -\sqrt{6} < 0$.

Il calcolo dell'integrale (0.5) può essere condotto in più modi:

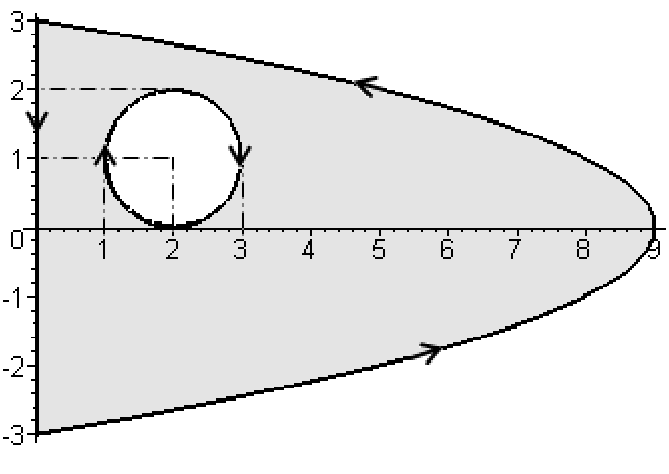
1) introducendo un campo vettoriale $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in C^1(A)$ (cioè di classe $C^1$ su un qualche aperto contenente $A$) tale che
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2} - y \tag{0.6}$$
per ogni $(x,y) \in A$ (ad esempio $\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2/2, x^2/4\right)$) ed applicando il teorema di Green[5] per recuperare l'integrale (0.5) come lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la frontiera di $A$, orientata positivamente;

2) integrando separatamente sull'interno della circonferenza e sull'interno dell'arco regolare a tratti dato dall'unione di parabola e segmento, per recuperare l'integrale (0.5) come differenza dei due;

3) spezzando $A$ in un opportuno numero di insiemi orizzontalmente o verticalmente convessi e calcolando direttamente (mediante riduzione) gli integrali doppi estesi a tali sottoinsiemi di $A$.

Come prescritto dal testo, seguiamo il primo procedimento. Gli altri due saranno comunque illustrati per esercizio al termine dello svolgimento (il primo risulta il più semplice dei tre, l'ultimo il più complicato).

Poichè il campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2/2, x^2/4\right)$ soddisfa (0.6) su $\mathbb{R}^2$ (e quindi in particolare su $A$), il teorema di Green assicura che
$$\int_A \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy = \int_{\Gamma_0} \mathbf{F}(x,y) \cdot dP + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F}(x,y) \cdot dP$$
dove gli integrali di linea a secondo membro sono estesi alle due componenti della frontiera di $A$ *orientate positivamente*, ossia secondo la percorrenza che lascia localmente l'interno di $A$ a sinistra.




[5] si noti che $D = A^\circ$ è un dominio di Green con $\partial D = \partial A$ e che $\int_A \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy = \int_D \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy$

Scomponendo $\partial A$ nei tre archi regolari

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1: & \text{circonferenza } (x-2)^2+(y-1)^2=1 \\ \Gamma_2: & \text{arco di parabola } 0\le x=9-y^2 \\ \Gamma_3: & \text{segmento } -3\le y\le 3,\ x=0 \end{array}$$

ed orientando ciascuno di essi secondo il verso che dà l'orientamento positivo di $\partial A$, cioè

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1: & \text{percorso in senso orario} \\ \Gamma_2: & \text{percorso in senso antiorario} \\ \Gamma_3: & \text{percorso dall'alto verso il basso} \end{array}$$

(come in figura), si ha allora

$$\int_A \left(\frac{x}{2}-y\right) dxdy = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}(x,y)\cdot dP\,. \tag{0.7}$$

Si tratta ora di eseguire il calcolo dei tre integrali a secondo membro, per cui serve una parametrizzazione regolare di ciascuno degli archi $\Gamma_i$.

- Tramite coordinate polari centrate in $(2,1)$, la circonferenza $\Gamma_1$ ammette la parametrizzazione regolare $\gamma_1(\theta)=(2+\cos\theta,1+\sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$, e si ha $\gamma_1'(\theta)=(-\sin\theta,\cos\theta)$.
- L'arco di parabola $\Gamma_2$ è il grafico di una funzione di classe $C^1$ della variabile $y$ sull'intervallo $[-3,3]$ ed ammette quindi parametrizzazione regolare standard $\gamma_2(t)=\left(9-t^2,t\right)$, $t\in[-3,3]$, con $\gamma_2'(t)=(-2t,1)$.
- Il segmento $\Gamma_3$ è ovviamente parametrizzato in modo regolare da $\gamma_3(t)=(0,t)$, $t\in[-3,3]$, con $\gamma_3'(t)=(0,1)$.

Al crescere del parametro $t$, il punto $\gamma_2(t)$ si muove su $\Gamma_2$ concordemente con il verso di percorrenza stabilito, quindi risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \mathbf{F}(x,y)\cdot dP &= +\int_{-3}^{3} \mathbf{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt = \int_{-3}^{3} \left(\frac{t^2}{2},\frac{\left(9-t^2\right)^2}{4}\right)\cdot(-2t,1)\,dt \\ &= \int_{-3}^{3} \left(-t^3+\frac{81-18t^2+t^4}{4}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(81-18t^2+t^4\right) dt = \frac{1}{2}\left[81t-6t^3+\frac{t^5}{5}\right]_0^3 \\ &= \frac{324}{5} \end{aligned}$$

dove per l'ultima riga si è tenuto conto del fatto che $\int_{-3}^{3} t^3 dt=0$ (integrando dispari su intervallo simmetrico) e $\int_{-3}^{3}\left(81-18t^2+t^4\right)dt = 2\int_0^3\left(81-18t^2+t^4\right)dt$ (integrando pari su intervallo simmetrico).

Al contrario, $\gamma_1$ e $\gamma_3$ inducono sulle loro immagini un orientamento opposto a quello prescritto e si ha allora

$$\int_{\Gamma_3} \mathbf{F}(x,y)\cdot dP = -\int_{-3}^{3} \mathbf{F}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)\,dt = -\int_{-3}^{3}\left(\frac{t^2}{2},0\right)\cdot(0,1)\,dt = 0$$

e

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F}(x,y)\cdot dP = -\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma_1(\theta))\cdot\gamma_1'(\theta)\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left(\frac{(1+\sin\theta)^2}{2},\frac{(2+\cos\theta)^2}{4}\right)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left( \sin\theta \frac{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta}{2} - \cos\theta \frac{4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta}{4} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \sin\theta + 2\sin^2\theta + \sin^3\theta - 2\cos\theta - 2\cos^2\theta - \frac{\cos^3\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \sin\theta + \sin^3\theta - 2\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{2} \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left( \sin^2\theta - \cos^2\theta \right) d\theta.
\end{aligned}
$$

Ora, ricordando che $\boxed{\textit{se } n \textit{ è dispari allora } \int_0^{2\pi} \sin^n t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt = 0}$, si ha subito

$$
\int_0^{2\pi} \left( \sin\theta + \sin^3\theta - 2\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{2} \right) d\theta = 0 \,.
$$

D'altra parte si ottiene

$$
\int_0^{2\pi} \left( \sin^2\theta - \cos^2\theta \right) d\theta = - \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = - \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0 \,,
$$

per cui in definitiva è

$$
\int_{\Gamma_1} \mathbf{F}(x,y) \cdot dP = 0 \,.
$$

Dunque, per la (0.7), si conclude

$$
\int_A \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F}(x,y) \cdot dP = \frac{324}{5} \,.
$$

**Procedimenti alternativi al teorema di Green.**

$\boxed{1}$ **Per differenza.** Utilizzando le notazioni dello svolgimento precedente, introduciamo gli interni $A_1$ e $A_0$ degli archi $\Gamma_1$ e $\Gamma_0 = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ rispettivamente. Risulta $A_0 = A \cup A_1$ con $|A \cap A_1| = 0$ e quindi

$$
\int_{A_0} \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy = \int_A \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy + \int_{A_1} \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy,
$$

ossia

$$
\int_A \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy = \int_{A_0} \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy - \int_{A_1} \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy. \tag{0.8}
$$

Calcoliamo allora i due integrali a secondo membro.

Poiché $A_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < y < 3, \, 0 < x < 9 - y^2 \right\}$, integrando per orizzontali si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{A_0} \left( \frac{x}{2} - y \right) dxdy &= \int_{-3}^{3} \left( \int_0^{9-y^2} \left( \frac{x}{2} - y \right) dx \right) dy = \int_{-3}^{3} \left[ \frac{x^2}{4} - yx \right]_{x=0}^{x=9-y^2} dy \\
&= \int_{-3}^{3} \left( \frac{1}{4} \left( 9 - y^2 \right)^2 - y \left( 9 - y^2 \right) \right) dy = \int_{-3}^{0} \left( \frac{81}{4} - 9y - \frac{9y^2}{2} + y^3 + \frac{y^4}{4} \right) dy \\
&= \left[ \frac{81}{4} y - \frac{9}{2} y^2 - \frac{3}{2} y^3 + \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{20} y^5 \right]_{-3}^{3} = \frac{324}{5}.
\end{aligned}
$$

Descrivendo $A_1$ tramite coordinate polari

$$\phi : \begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = 1 + \rho\sin\theta \end{cases}$$

centrate nel centro di $\Gamma_1$, risulta $A_1 \setminus \{(2,1)\} = \big\{(2+\rho\cos\theta, 1+\rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi\big\}$ e quindi

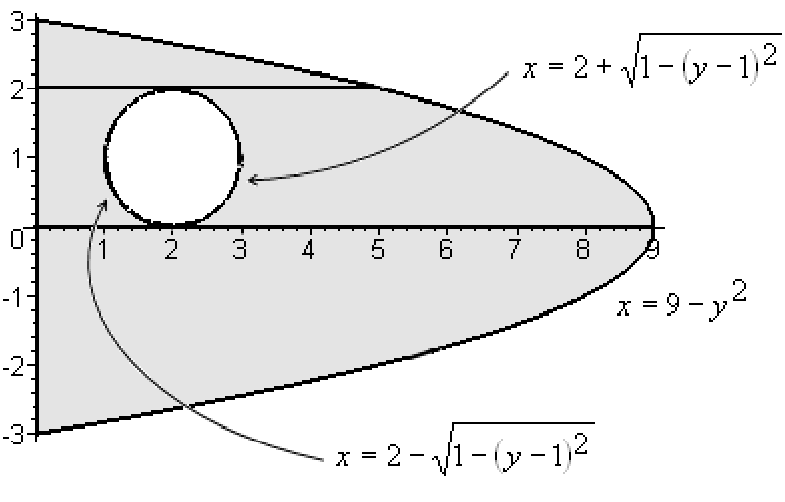
$$\int_{A_1} \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{2+\rho\cos\theta}{2} - 1 + \rho\sin\theta\right)\rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta\right)\rho^2 d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta\right)d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^2 d\rho\right) = \left[\frac{1}{2}\sin\theta - \cos\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = 0.$$

Sostituendo nella (0.8) si ottiene dunque

$$\int_A \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy = \frac{324}{5}.$$

$\boxed{2}$ **Per orizzontali.** Introdotti i sottoinsiemi orizzontalmente convessi

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3,0]\,,\ 0 \le x \le 9 - y^2\right\} \\
A_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2]\,,\ 0 \le x \le 2 - \sqrt{1-(y-1)^2}\right\} \\
A_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2]\,,\ 2 + \sqrt{1-(y-1)^2} \le x \le 9 - y^2\right\} \\
A_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2,3]\,,\ 0 \le x \le 9 - y^2\right\}
\end{aligned}$$




si ha $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ (con intersezioni a due a due di misura nulla) e

$$\int_A \left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy = \sum_{i=1}^{4}\int_{A_i}\left(\frac{x}{2} - y\right) dxdy\,. \tag{0.9}$$

Calcoliamo separatamente i quattro integrali a secondo membro, riducendo ciascuno a due integrazioni successive.

Si ha

$$\begin{aligned}\int_{A_1}\left(\frac{x}{2}-y\right)dxdy &= \int_{-3}^{0}\left(\int_0^{9-y^2}\left(\frac{x}{2}-y\right)dx\right)dy = \int_{-3}^{0}\left[\frac{x^2}{4}-yx\right]_{x=0}^{x=9-y^2}dy \\ &= \int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{4}\left(9-y^2\right)^2-y\left(9-y^2\right)\right)dy = \int_{-3}^{0}\left(\frac{81}{4}-9y-\frac{9y^2}{2}+y^3+\frac{y^4}{4}\right)dy \\ &= \left[\frac{81}{4}y-\frac{9}{2}y^2-\frac{3}{2}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{20}y^5\right]_{-3}^{0} = \frac{1053}{20}\end{aligned}$$

e analogamente

$$\int_{A_4}\left(\frac{x}{2}-y\right)dxdy = \int_2^3\left(\int_0^{9-y^2}\left(\frac{x}{2}-y\right)dx\right)dy = \left[\frac{81}{4}y-\frac{9}{2}y^2-\frac{3}{2}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{20}y^5\right]_0^3 = -\frac{79}{20}\,.$$

Sottintendendo nel seguito (in corrispondenza dei puntini) lo svolgimento di alcuni calcoli di natura puramente algebrica (peraltro non semplicissimi), si trova poi

$$\begin{aligned}\int_{A_2}\left(\frac{x}{2}-y\right)dxdy &= \int_0^2\left(\int_0^{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}\left(\frac{x}{2}-y\right)dx\right)dy = \int_0^2\left[\frac{x^2}{4}-yx\right]_{x=0}^{x=2-\sqrt{1-(y-1)^2}}dy \\ &\vdots \\ &= \int_0^2\left(1-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}y^2+(y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}\right)dy \\ &= \int_0^2\left(1-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}y^2\right)dy+\int_0^2(y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}dy \\ &= \left[y-\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2+\int_{-1}^{1}v\sqrt{1-v^2}dv = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

dove si è operata la sostituzione $v=y-1$ e si è poi tenuto conto del fatto che $\int_{-1}^{1}v\sqrt{1-v^2}dv=0$ (integrando dispari su intervallo simmetrico). Infine

$$\begin{aligned}\int_{A_3}\left(\frac{x}{2}-y\right)dxdy &= \int_0^2\left(\int_{2+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{9-y^2}\left(\frac{x}{2}-y\right)dx\right)dy = \int_0^2\left[\frac{x^2}{4}-yx\right]_{x=2+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{x=9-y^2}dy \\ &\vdots \\ &= \int_0^2\left(\frac{77}{4}-\frac{15}{2}y-\frac{17}{4}y^2+y^3+\frac{1}{4}y^4\right)dy+\int_0^2(y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}dy \\ &= \left[\frac{77}{4}y-\frac{17}{12}y^3+\frac{1}{20}y^5-\frac{15}{4}y^2+\frac{1}{4}y^4\right]_0^2 = \frac{533}{30}\end{aligned}$$

dove, come sopra, si è usato il fatto che $\int_0^2(y-1)\sqrt{1-(y-1)^2}dy=0$.

Dunque dalla (0.9) si deduce finalmente

$$\int_A\left(\frac{x}{2}-y\right)dxdy = \frac{1053}{20}-\frac{5}{3}+\frac{533}{30}-\frac{79}{20} = \frac{324}{5}\,.$$

$\boxed{3}$ **Per verticali.** Del tutto analogamente al punto precedente (ma con conti ulteriormente complicati dalla presenza di più radici) si sarebbe potuto ricorrere alla scomposizione $A = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \bar{A}_4$ negli insiemi verticalmente convessi

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\,,\, -\sqrt{9-x} \leq y \leq \sqrt{9-x}\right\} \\
\bar{A}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,3]\,,\, -\sqrt{9-x} \leq y \leq 1 - \sqrt{1-(x-2)^2}\right\} \\
\bar{A}_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,3]\,,\, 1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \leq y \leq \sqrt{9-x}\right\} \\
\bar{A}_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [3,9]\,, -\sqrt{9-x} \leq y \leq \sqrt{9-x}\right\} \,.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Il passaggio a coordinate polari su tutto l'insieme $A$ (anche centrare nel centro $(2,1)$ della circonferenza) presenta notevoli difficoltà.