# Ottimizzazione delle funzioni in più variabili


Rosario Maggistro


*Matematica per l'economia e la statistica - corso progredito*


Università degli Studi di Trieste


a.a. 2023-2024

Il termine *ottimizzazione* si riferisce ad un'ampia categoria di problemi.

*Esempi:*

1. In economia è legato ai meccanismi decisionali finalizzati ad ottenere il massimo di utilità o di profitto da una data quantità di beni o risorse;
2. In meccanica: minimizzare energia potenziale di un sistema conservativo conduce a trovare le posizioni di equilibrio stabile.

In generale massimizzeremo o minimizzeremo un obiettivo la cui modellizzazione matematica dipende dalla natura del problema.

Cerchiamo i punti di massimo e/o di minimo di:

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}, \quad n \geq 2$$

(Il caso $n = 1$, è già stato esaminato in Analisi 1).

Affronteremo due tipi di problema di ottimizzazione:

1. in punti interni al dominio (estremi liberi o estremi non vincolati);
2. per $f|_{\partial X}$ o ad un sottoinsieme (non aperto) $U$ di $X$ (estremi vincolati).

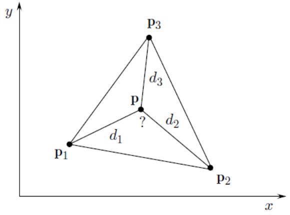
*Esempio:*

1. Trovare gli estremi di $f(x) = x^2$ per $x \in \mathbb{R}$.
2. Trovare gli estremi di $f(x) = x^2$ per $x \in [-1, 1]$.

*Svolgimento:*

1. Si calcola $f'(x) = 2x$, si guarda quando $f'(x) = 0$ e si deduce che $x = 0$ è un punto estremo. Di seguito si studia la natura del punto estremo.
2. Si calcolano i punti estremi interni all'intervallo, poi si valuta la funzione $f$ nei punti estremi e nei punti del bordo e si deducono i valori massimi e minimi assoluti. Quindi $f(\pm 1) = 1$ e $f(0) = 0$ e possiamo dedurre che $\pm 1$ sono massimi assoluti e 0 minimo assoluto.

*Esempio di ricerca di estremi liberi:*
Tre punti $p_1, p_2, p_3$ disposti ai vertici di un triangolo acutangolo devono essere collegati con un quarto punto, mediante un cavo, in modo da utilizzare meno materiale possibile. Dove collochiamo il punto $p$?



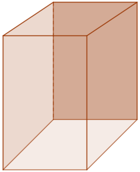

Poniamo:

$$d_j(x, y) = |p - p_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad j = 1, 2, 3$$

Dobbiamo minimizzare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{3} d_j(x, y), \quad (x, y) \text{ varia nell'aperto } \mathbb{R}^2$$

*Esempio di un problema di massimizzazione con vincoli di uguaglianza:*
Fra tutti i parallelepipedi aventi superficie totale assegnata, $2A$, determinare quello di volume massimo.



Indichiamo con $x, y, z$ le lunghezze degli spigoli del parallelepipedo.
Dobbiamo massimizzare:

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{su} \quad \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\right\}$$

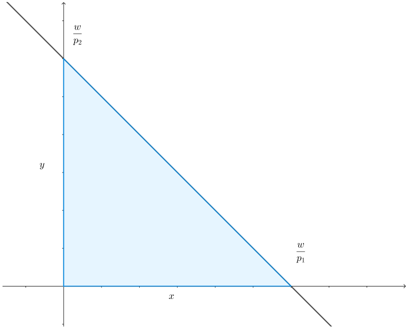
con la condizione che $2(xy + yz + zx) = 2A$

*Esempio di ottimizzazione in presenza di vincoli di disuguaglianza:*
Le variabili $x$ ed $y$ esprimono quantità di beni, fattori o altro. Quindi deve essere $x \geq 0$, $y \geq 0$.
La spesa complessiva per l'acquisto di due beni in quantità $x$ ed $y$ dati i prezzi $p_1$ e $p_2$ dei beni sarà $g(x, y) = p_1 x + p_2 y$
Se la ricchezza disponibile è $w > 0$, la spesa deve soddisfare $g(x, y) \leq w$. Il problema sarà:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ p_1 x + p_2 y \leq w \end{cases}$$

Questo sistema definisce il “vincolo di bilancio" ed è legato a problemi di massimo profitto o utilità massima.

Il vincolo può essere rappresentato dal triangolo:




La retta $p_1x + p_2y = w$ è la *retta di bilancio*.
I punti sui cateti del triangolo presuppongono l'acquisto di uno solo dei due beni. Nell'origine non si acquista nulla.
I punti dell'ipotenusa equivalgono a spendere tutta la ricchezza disponibile senza risparmiare nulla.

# Generalità sull'ottimizzazione

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X$ aperto.

## Definizione

Un punto $\boldsymbol{x}^0 \in X$ si dice di *massimo (minimo) locale* per $f$ se esiste un intorno $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ tale che

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) \quad \left(\text{oppure } f(\boldsymbol{x}) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right)$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in X \cap B_r\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.
Si dice di *massimo (minimo) globale* per $f$ se la disuguaglianza vale per ogni $\boldsymbol{x} \in X$.

Se la disuguaglianza vale in senso stretto per $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^0$ è un punto di *massimo (minimo) locale o globale forte.*
Il valore $f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ si dirà *massimo (o minimo) locale o globale forte.*

Se $X$ è un aperto, gli eventuali estremi $f$ si dicono *liberi*. Più in generale si parla di *calcolo degli estremi liberi* se si vogliono individuare punti di estremi *interni* al dominio.

Supponiamo di essere interessati ai valori che $f$ assume non in tutto $X$, ma in un sottoinsieme $U \subset X$ (quindi $f|_U$). Se $X$ è chiuso, potrebbe essere $U = \partial X$). In tal caso:

**Definizione**

$\boldsymbol{x}^0$ si dice *punto di massimo (minimo) locale* per $f|_U$ se esiste $B_r\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ tale che

$$f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) \quad \left(\text{oppure } f\left(\boldsymbol{x}\right) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right) \quad \forall \boldsymbol{x} \in B_r\left(\boldsymbol{x}^0\right) \cap U$$

$\boldsymbol{x}^0$ si dice di *massimo (minimo) globale* se

$$f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) \quad \left(\text{oppure } f\left(\boldsymbol{x}\right) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right) \quad \forall \boldsymbol{x} \in U$$

Attenzione: un estremo di qualunque natura per $f$ è automaticamente un estremo della stessa natura per $f|_U$, ma non è vero il viceversa.

*Esempio:*
$f(x) = x^2$.
Calcoliamo $f'(x) = 2x$ e la poniamo uguale a 0. Otteniamo $x = 0$, che è punto di minimo globale per $f$ su $\mathbb{R}$. Infatti $f(0) = 0$ e $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

*Esempio:*
$f(x) = x^2, \quad x \in [-1; 2]$
$x = 0$ è punto di minimo globale
$x = -1$ è punto di massimo locale
$x = 2$ è punto di massimo globale
Anche nel caso di funzioni di una variabile reale a valori reali i punti di massimo o minimo, locale o globale, si possono trovare anche nei punti del bordo (dove si ha solo la nozione di derivata destra o sinistra) e in generale vanno analizzati a parte.

*Esempio:*
$f(x) = |x|$
$x = 0$ è punto di minimo ma in $x = 0$ la $f$ non è derivabile.
$\Rightarrow$ in una variabile i punti di massimo/minimo globale o locale possono trovarsi tra i punti di non derivabilità di $f$.

*Esempio:*
$f(x) = x^3$.
Abbiamo che $f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Questo non è punto di minimo o massimo né locale, né globale.
Anche nel caso di funzioni reali di una variabile reale non tutti i punti che annullano la derivata prima sono effettivamente punti di massimo o minimo.

Se $U$ sottoinsieme di $X$ è descritto da equazioni del tipo:

$$g_j\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m \quad \text{con } m < n$$

parliamo di *ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza*.

Se l'insieme è definito da un sistema di disequazioni del tipo:

$$h_j\left(x_1, \ldots, x_n\right) \leq 0 \qquad j = 1, \ldots m$$

parliamo di *ottimizzazione vincolata con vincoli di disuguaglianza*.

## Questioni di cui tenere conto in un problema di ottimizzazione:

- **Esistenza**: questo problema si presenta prevalentemente nella ricerca degli estremi globali.
  Per garantirne l'esistenza potrebbe essere utile il teorema di Weierstrass (*se $X$ è compatto ed $f$ è continua in $X$, allora $f$ ammette massimo e minimo (globali) in $X$*).

- **Unicità**: questo problema si presenta prevalentemente nella ricerca degli estremi globali. Supponiamo di sapere che $f(\boldsymbol{x}^0)$ sia il minimo globale di $f$ in $X$. Questo minimo è unico? Esistono altri punti $\boldsymbol{x}$ tali che $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$?
  In questo caso è utile sapere se il dominio è convesso e/o la funzione è convessa

## Questioni di cui tenere conto in un problema di ottimizzazione:

- **Caratterizzazione dei punti di estremo**: si tratta di capire se esistono punti stazionari (teorema di Fermat) e di riconoscerne la natura come nel caso unidimensionale. I metodi utilizzati saranno:
    - dei moltiplicatori di Lagrange (nel caso di vincoli di uguaglianza)
    - di Kuhn-Tucker (nel caso di vincoli di disuguaglianza)
- **Algoritmi di calcolo**: quando le variabili in gioco sono molte, bisogna costruire algoritmi (differenti) efficienti che permettano di determinare i punti che interessano. Qui, però, entriamo nel campo dell'Analisi Numerica.

# Estremi liberi. Condizioni necessarie

Siano $f : X \to \mathbb{R}$, con $X$ aperto di $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}^0$ un estremo locale per $f$. Sia $\boldsymbol{v}$ versore di $\mathbb{R}^n$. Definiamo $g\left(t\right) = f\left(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{v}\right)$.

La funzione $g$ è reale di variabile reale $t$, è definita in un intorno di $t = 0$ e ha in $t = 0$ un estremo. Se $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ derivata nella direzione $\boldsymbol{v}$ di $f$ esiste, per il teorema di Fermat $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0) = g'(0) = 0$.

### Teorema (di Fermat)

Se $\boldsymbol{x}^0$ è punto di estremo locale per $f$ e la derivata direzionale $D_{\boldsymbol{v}} f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ esiste, allora $D_{\boldsymbol{v}} f\left(\boldsymbol{x}^0\right) = 0$.

### Corollario

Se $f$ è differenziabile in $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^0$ è punto di estremo locale per $f$, allora ogni derivata direzionale in $\boldsymbol{x}^0$ è nulla. In particolare $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^0\right) = 0$.

Il corollario ci dice che se $f$ è differenziabile, un punto in cui il gradiente o il differenziale si annulla si dice **stazionario** o **critico**.

Attenzione: le condizioni espresse nel Teorema e nel Corollario non sono sufficienti per decidere se un punto $\boldsymbol{x}^0$ sia di estremo, né di quale tipo di estremo si tratti.

L'idea potrebbe essere che se $\boldsymbol{x}^0$ è critico per $f$ ed è un punto di massimo (minimo) lungo ogni direzione uscente da $\boldsymbol{x}^0$, cioè per ogni versore $\boldsymbol{v}$, allora è punto di massimo (minimo) locale per $f$.

Mostriamo che se $\boldsymbol{x}^0$ è un punto critico per $f$ ed è di massimo (minimo) lungo ogni direzione uscente da $\boldsymbol{x}^0$, allora è punto di massimo (minimo) locale per f è falso.

*Esempio:*
Sia $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = \left(y - x^2\right)\left(y - 2x^2\right)$

Calcoliamo:

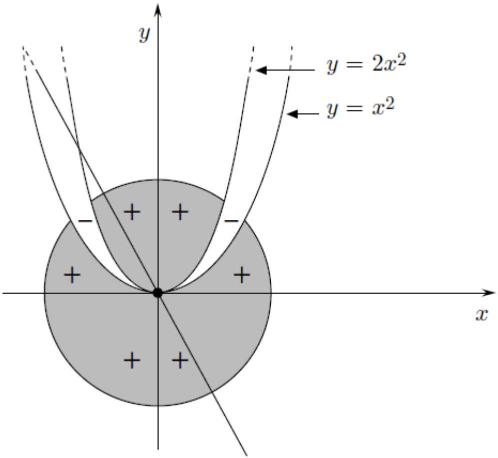
$$f_x = -6xy + 8x^3, \quad f_x(0,0) = 0$$

$$f_y = 2y - 3x^2, \quad f_y(0,0) = 0$$

Studiamo il comportamento di $(0,0)$ lungo tutte le direzioni uscenti.
Lungo l'asse $y$ si ha $f(0,y) = y^2$, che raggiunge il minimo in $y = 0$.
(Lungo l'asse $x$ si ha $f(x,0) = 2x^4$, che raggiunge il minimo in $x = 0$.)
Studiamo il comportamento del punto lungo gli assi e lungo tutte le rette $y = mx$:

$$f(x,mx) = m^2x^2 - 3mx^3 + 2x^4$$

ha minimo in $x = 0$, $\forall m$.




Ma: $(0,0)$ non è punto di minimo locale per $f$, perché la funzione cambia segno in ogni intorno circolare di $(0,0)$. Esistono punti in cui $f$ è positiva, altri in cui è negativa.

## Definizione

Se in ogni intorno di $\boldsymbol{x}^0$ esistono punti in cui $f$ è maggiore di $f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ e punti in cui è minore di $f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$, $\boldsymbol{x}^0$ si dice *di sella* o *di colle.*

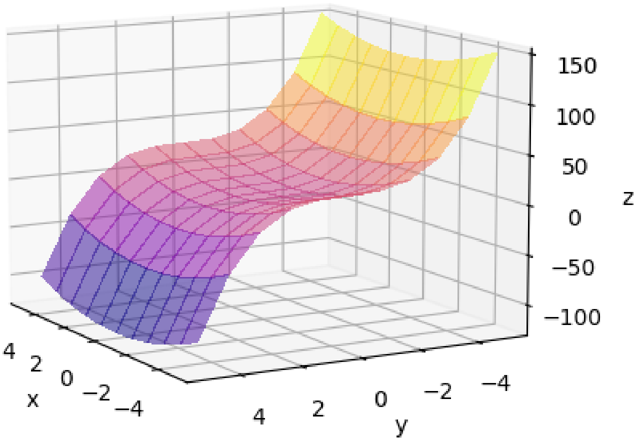
*Esempio:*
$f(x, y) = x^2 - y^3$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi si può applicare il teorema di Fermat:
$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x, -3y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$
L'origine è l'unico punto stazionario o critico per $f$.

Per capire se è di massimo o di minimo si può studiare *l'incremento* di $f$:

$$\Delta f(0, 0) = f(x, y) - f(0, 0)$$

Se ci restringiamo all'asse $y$:
$f(0, y) = -y^3 \Rightarrow \Delta f(0, 0) > 0$ se $y < 0$ e $\Delta f(0, 0) < 0$ se $y > 0$
In ogni intorno dell'origine l'incremento ha segno opposto.
Quindi l'origine è punto di sella o di colle.


150
100
50
0
−50
−100
z
4
2
0
−2
−4
x
4
2
0
−2
−4
y

*Esempio:*
$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. $f$ è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Dal teorema di Fermat:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - 2xy, 4y - x^2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 4y = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \vee y = 1 \\ y = 0 \vee x = \pm 2 \end{cases}$$

I punti critici sono $(0,0), (2,1), (-2,1)$.

In questo caso è difficile studiare la natura dei punti critici utilizzando l'incremento. Abbiamo bisogno di criteri che ci aiutino a portare avanti quest'analisi in modo agevole.

Come si trovano gli estremi liberi?
Risolvendo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Una volta determinati gli eventuali punti critici occorrono altre indagini per deciderne la natura.

Per funzioni convesse o concave possono essere tratte conclusioni immediate.

## Proposizione

Se $\boldsymbol{x}^0$ è un punto critico per una funzione $f$, convessa (concava) e differenziabile, allora $\boldsymbol{x}^0$ è un punto di minimo (massimo) globale. Inoltre, se $f$ è strettamente convessa (concava) il punto di minimo (massimo) è unico e forte.

*Dimostrazione:* Se $f$ è convessa e differenziabile in $\boldsymbol{x}^0$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$, si ha $f(\boldsymbol{x}) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) + df\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.
Dato che $\boldsymbol{x}^0$ è critico, $df\left(\boldsymbol{x}^0\right) = 0$. Quindi $f(\boldsymbol{x}) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$.
Dunque $x_0$ è un punto di minimo globale.
Se $f$ è strettamente convessa la disuguaglianza iniziale vale in senso stretto $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$. Quindi $\boldsymbol{x}^0$ è un minimo globale e forte ed è unico. $\square$

*Attenzione:*

La scrittura $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^0) + df(\boldsymbol{x}^0)$ in due variabili diventa:

$$f(x_1 x_2) \geq f(x_1^0, x_2^0) + f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0);$$

cioè in corrispondenza di $(x_1, x_2)$ la quota sul grafico di $f$ è maggiore o uguale a quella sul piano tangente nel punto $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$.

*Esempio:*

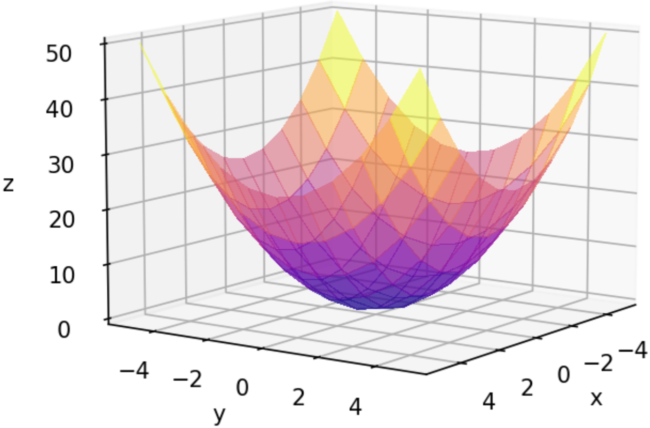
Calcolare i punti critici di $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. $f$ è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Dal teorema di Fermat:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

L'origine quindi è l'unico punto critico di $f$.
Da $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$, deduciamo che $P = (0, 0)$ è un minimo assoluto.

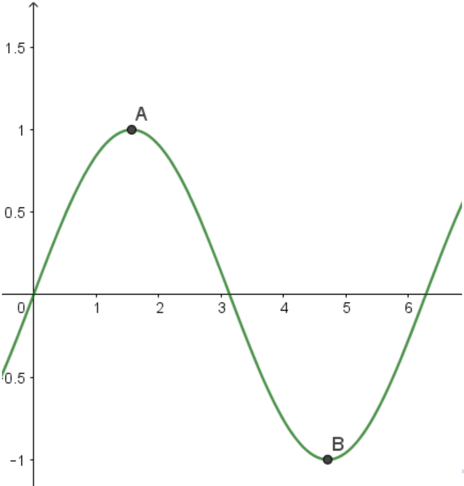
$f(x, y) = x^2 + y^2$, infatti, è convessa. Quindi $(0, 0)$ è l'unico punto critico per $f$ ed è di minimo assoluto.


z
50
40
30
20
10
0
−4
−2
0
2
4
y
−4
−2
0
2
4
x

# Forme quadratiche

Ricordiamo che in una variabile se:

- $f'(x_0) = 0$ e $f^{(2)}(x_0) < 0$ abbiamo un punto di massimo;
- $f'(x_0) = 0$ e $f^{(2)}(x_0) > 0$ abbiamo un punto di minimo;



Un modo per determinare la natura di un punto critico $x_0$ è quello di usare la formula di Taylor per analizzare il segno di $f(x_0+h)-f(x_0)$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o\left(h^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o\left(h^2\right)=\frac{1}{2}d^2f(x_0)+o\left(h^2\right)\qquad \text{per } h\to 0$$

- Se $f''(x_0)\neq 0$, il segno di $f(x_0+h)-f(x_0)$ è quello di $f''(x_0)$
- Se $f''(x_0)=0$, occorre fare un'analisi più approfondita

Nel caso multidimensionale troveremmo:

$$f\left(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^0\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}\left(\boldsymbol{x}^0\right)h_ih_j+o\left(|\boldsymbol{h}|^2\right)$$

e il segno di $f\left(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ dipende dall'analisi del differenziale secondo di $f$ in $\boldsymbol{x}_0$, ovvero dall'analisi della forma quadratica.

## Definizione

Una **forma quadratica** (f.q.) in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo:

$$q(\boldsymbol{h}) = q(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

dove gli $a_{ij}$ sono numeri reali, coefficienti della f.q.. Se tutti gli $a_{ij}$ sono uguali a zero, parliamo di f.q. nulla.

Possiamo sempre supporre che $a_{ij} = a_{ji}$. Se così non fosse basterebbe sostituire i due coefficienti con $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$.
A ogni $q(\boldsymbol{h})$ risulta associata una matrice simmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ con una corrispondenza biunivoca.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Esempio:*
$q(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

*Esempio:*
$q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Esempio:*
$q(h_1, h_2, h_3, h_4) = -h_1^2 - 3h_2^2 + h_4^2 - 2h_1h_3 + 10h_2h_4$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siamo interessati al segno di una f.q. al variare di $\boldsymbol{h}$.
Siccome la f.q. è omogenea di secondo grado, $q(\boldsymbol{h})$ assume segno costante su ogni retta passante per l'origine, origine esclusa: $q(t\boldsymbol{h}) = t^2 q(\boldsymbol{h})$.

Esempi di tutte le possibilità di comportamento di una f.q. in $\mathbb{R}^2$:

- $q(h,k) = h^2 + k^2 > 0, \ \forall (h,k) \neq (0,0)$ è definita positiva
- $q(h,k) = -h^2 - k^2 < 0, \ \forall (h,k) \neq (0,0)$ è definita negativa
- $q(h,k) = h^2 > 0$ è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo $(0,k)$. Diremo che è semidefinita positiva
- $q(h,k) = -h^2 < 0$ è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo $(0,k)$. Diremo che è semidefinita negativa
- $q(h,k) = -h^2 + k^2 > 0$ è positiva per $(0,k) \wedge k \neq 0$ ed è negativa per $(h,0) \wedge h \neq 0$. Diremo che è indefinita

Gli esempi suggeriscono quindi la seguente classificazione che si applica sia alle f.q. che alle matrici simmetriche ad esse associate.

## Definizione

Una f.q. (o la matrice simmetrica corrispondente), $q(\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, si dice:

- *definita positiva (negativa)* se $\forall \boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$, $q(\boldsymbol{h}) > 0$ ($q(\boldsymbol{h}) < 0$);
- *semidefinita positiva (negativa)* se $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $q(\boldsymbol{h}) \geq 0$ ($q(\boldsymbol{h}) \leq 0$) ed esiste $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$ tale che $q(\boldsymbol{h}) = 0$;
- *indefinita (o non definita)* se esistono $\boldsymbol{h}^1$ e $\boldsymbol{h}^2$ tali che $q(\boldsymbol{h}^1) < 0$ e $q(\boldsymbol{h}^2) > 0$.

È sempre bene specificare lo spazio vettoriale in cui si opera quando si vuole classificare una f.q.
Infatti $q(h,k) = h^2 + k^2$ è definita positiva in $\mathbb{R}^2$ ma è semidefinita in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$.

Come classificare una f.q. senza ricorrere alla definizione?

Se $n = 2$:

$$q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$$

con $a, b, c$ non tutti nulli.

Se $a = c = 0$ è indefinita.
Se $a \neq 0$ possiamo riscriverla come:

$$q(h_1, h_2) = a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}h_2^2$$

e i coefficienti dei quadrati sono $a$ e $\frac{|A|}{a}$, dove $|A|$ è il determinante di:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Vale il seguente risultato:

### Proposizione (segno delle f.q. in 2 variabili)

*La forma quadratica* $q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$ *è:*

- *Definita positiva* $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ *e* $a > 0$
- *Definita negativa* $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ *e* $a < 0$
- *Semidefinita positiva* $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ *e* $a > 0$*, oppure se* $\det A = 0$ *e* $c > 0$
- *Semidefinita negativa* $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ *e* $a < 0$*, oppure se* $\det A = 0$ *e* $c < 0$
- *Indefinita* $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$

Nella proposizione il test fa intervenite non solo la matrice $A$, ma anche una matrice $1 \times 1$, ad esempio quella in alto a sinistra, che chiameremo $A_1 = (a_{11})$.

Se generalizziamo questo test, questo farà intervenire tutte le $n$ sottomatrici $A_k$ composte mediante le prime $k$ righe e $k$ colonne di $A$, chiamate *sottomatrici principlai di nord-ovest*.

$$A_1 = (a_{11}),\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = A$$

i cui determinanti si chiamano *minori principali di nord-ovest*.

## Teorema (segno delle f.q. in $n$ variabili)

Sia $q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

1. $q$ è definita positiva $\Leftrightarrow |A_k| > 0, \forall k = 1, \dots, n$
2. $q$ è definita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \cdot |A_k| > 0, \forall k = 1, \dots, n$ (cioè $a_{11} < 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| < 0, \dots$)

Il teorema vale anche con le sottomatrici principali di sud-est, cioè costruite partendo da in basso a destra con l'elemento $a_{nn}$, aggiungendo ogni volta una riga fino ad arrivare ad $A$.

*Esempio:*

$q(h_1, h_2, h_3) = 5h_1^2 - 8h_1h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 5 > 0$, $|A_2| = 15 > 0$, $|A_3| = |A| = 5 \cdot 12 + (-4) \cdot 12 = 12 > 0$
La f.q. è definita positiva.

Per le f.q. semidefinite occorre considerare tutte le sottomatrici principali di $A$.

*Esempio:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 0$, $|A| = 0$ e $b_{11} = 0$, $|B| = 0$ non permettono di distinguere il segno (corrispondono rispettivamente ad una f.q. semidefinita positiva e una negativa).

## Teorema

Sia $q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

1. $q$ è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ ogni sottomatrice principale ha determinante non negativo.
2. $q$ è semidefinita negativa $\Leftrightarrow$ ogni sottomatrice principale di ordine $k$ ha determinante non negativo se $k$ è pari, non positivo se $k$ è dispari.

In ogni altro caso $q(\boldsymbol{h})$ è indefinita.

*Esempio:*
$q(h_1, h_2, h_3) = -2h_1^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 5h_2^2 - 8h_2h_3 - 5h_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -2 < 0$, $|A_2| = 9 > 0$, $|A_3| = |A| = 0$, quindi non è definita negativa.

Le sottomatrici principali sono: $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

il cui determinante è $9 > 0$. $q$ è semidefinita negativa.

*Esempio:*
$q(h,k) = -2h^2 + 2hk - 3k^2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -2 < 0$, $\det A = 5 > 0$. La f.q. risulta definita negativa.

*Esercizio:*
Classificare le seguenti f.q. in $\mathbb{R}^2$:

1. $q_1(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$
2. $q_2(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$
3. $q_3(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$
4. $q_4(x,y) = 3xy$
5. $q_5(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2$

*Esercizio:*
Classificare, al variare del parametro reale $\alpha$, la f.q. rappresentata dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

*Esercizio:*
Studiare, al variare di $k$, le forme quadratiche:

1. $q_1(x, y) = k^2x^2 + (k+1)y^2 + 12xy$
2. $q_2(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 + 2kxz + 2yz$

*Esercizio:*
Si determini, al variare del parametro $k$, il segno della f.q. $q(x, y, z) = x^2 + 2kxy + y^2 + 2kyz + z^2$.