

**Università di Trieste - Dipartimento di  
Matematica e Geoscienze  
227SM - Istituzioni di Matematiche A 2023**

**Esercitazione 3**

Saverio Franzese

1. Stabilire se in  $(0, 0)$  risulta continua, derivabile o differenziabile la funzione definita da:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

2. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

è continua, derivabile o differenziabile nell'origine.

3. Si determinino gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

Determinare inoltre l'equazione del piano tangente di  $f$  nel punto  $(-1, 1, 1)$ .

4. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = 3x^2y - 4xy$$

nel punto  $(1, 2)$  lungo la direzione del vettore  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ .

5. Calcola i seguenti integrale fratti

(a)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 3x},$$

(b)

$$\int \frac{1}{x(x^2 - 1)^2}.$$

6. Calcolare i seguenti integrali

(a)

$$\int \sin(2x) \log(\sin(x)) dx,$$

(b)

$$\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 + \sin(x)} dx,$$

(c)

$$\int \frac{\log(x)}{x(1 + \log(x))} dx,$$

(d)

$$\int \frac{(x+2)}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

7. Determinare se l'origine è un punto critico, ed eventualmente stabilirne la natura, per le seguenti funzioni:

(a)

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + z^4,$$

(b)

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - z^4.$$