TRASFORMAZIONI CANONICHE

In un sist. Hamiltoniano, lo STATO è dato da un pto nello SPAZIO DELLE FASI, individuato dalle coord. $(\bar{p}, \bar{q})$.

Il MOTO di qto punto nello spazio delle fasi descrive come evolve lo stato del sistema

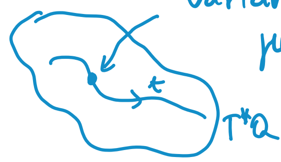
Un SISTEMA HAMILTONIANO è tale se esiste un sistema di coordinate $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, dette COORDINATE CANONICHE, t.c. le equazioni del moto (eq. nelle incognite $p_1(t), \dots, p_n(t), q_1(t), \dots, q_n(t)$) hanno la semplice forma delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_h(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \\ \dot{q}_h(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_h}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \end{cases} \qquad h = 1, \dots, n \qquad \text{e } H : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$$

detta HAMILTONIANA

Le funzioni $\bar{p}(t)$ e $\bar{q}(t)$ descrivono il moto, nel senso che ad ogni t associano un set di numeri $(p_1, \dots, q_n)$ che individuano un pto nello sp. delle fasi T^*Q. Al variare di t questo punto cambia.

Lo stesso moto può essere descritto scegliendo diverse coord. per tale pto, per es. $(\tilde{p}, \tilde{q})$.



Variare del pto lungo qto moto può essere descritto in arbitrari sist. di coord.

In qto sist. di coord. il moto è dato dalle funzioni $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$.

Se la trasf. di coord è

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \qquad q = v(\tilde{p}, \tilde{q}, t),$$

allora deve valere $\quad p(t) = u(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \quad q(t) = v(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$.

Domanda: le equazioni differenziali che $\tilde{p}_h(t)$ e $\tilde{q}_h(t)$ $(h = 1, \dots, n)$ soddisfano, sono ancora nella FORMA DI EQ. DI HAMILTON?

→ qta domanda equivale a chiedersi se esiste una funzione Hamiltoniana $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. le funz. $\tilde{p}_h(t), \tilde{q}_h(t)$ soddisfano le eq. diff.

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \qquad \dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \qquad h = 1, \dots, n$$

Se qto accade, la trasf. di coord. (tra due set di COORDINATE CANONICHE) è detta **TRASFORMAZIONE CANONICA**.

ESEMPIO di trasformazione NON-canonica.

Consideriamo la seguente trasf. di coord nello spazio delle fasi:

$$p = \tilde{p}\cos\tilde{q} \qquad (0)$$
$$q = \frac{\tilde{p}}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q}$$

dove (p, q) sono coord. canoniche. Lo sono anche $(\tilde{p}, \tilde{q})$?

Consideriamo la PARTICELLA LIBERA con $H = \frac{p^2}{2m}$;
le eq. di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 0 \\ \dot{q}(t) = \frac{p(t)}{m} \end{cases} \qquad (\star)$$

Vediamo quali sono le eq. che le funz. $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ soddisfano, tenuto conto che esse sono legate alle funz. $p(t), q(t)$ da

$$p(t) = \tilde{p}(t)\cos\tilde{q}(t)$$
$$q(t) = \frac{\tilde{p}(t)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q}(t)$$

Facciamo le derivate temporali di ambo i lati:

$$\dot{p} = \dot{\tilde{p}}\cos\tilde{q} - \tilde{p}\dot{\tilde{q}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q}$$
$$\dot{q} = \frac{\dot{\tilde{p}}}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} + \frac{\tilde{p}\dot{\tilde{q}}}{m\omega}\cos\tilde{q}$$

Siccome p, q soddisfano $(\star)$, le $\tilde{p}, \tilde{q}$ soddisfano

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}\cos\tilde{q} - \tilde{p}\dot{\tilde{q}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} = 0 \\ \frac{\dot{\tilde{p}}}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} + \frac{\tilde{p}\dot{\tilde{q}}}{\omega}\cos\tilde{q} = \tilde{p}\cos\tilde{q} \end{cases}$$

← sist. lineare in incognite $\dot{\tilde{p}}, \dot{\tilde{q}}$

Risolviamo il sist. lin. e troviamo le eq:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \omega \tilde{p} \cos\tilde{q} \operatorname{sen}\tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} = \omega \cos^2\tilde{q} \end{cases} \quad (*)$$

$\leftarrow$ $\tilde{p}(t)$ e $\tilde{q}(t)$ soddisfano queste equaz. diff.

Se $\tilde{p}, \tilde{q}$ sono buone coord. canoniche, allora $(*)$ potranno essere scritte nella forma di eq. di Hamilton, cioè $\exists$ funz. $K(\tilde{p}, \tilde{q})$ t.c.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = -\dfrac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} = \dfrac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \end{cases}$$

Qto avviene se $\exists K(\tilde{p}, \tilde{q})$ t.c.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} &\overset{?}{=} -\omega \tilde{p} \cos\tilde{q} \operatorname{sen}\tilde{q} \\ \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} &\overset{?}{=} \omega \cos^2\tilde{q} \end{aligned}\right\}$$

Se qto avviene bisogna che si verifichi la condizione

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}}\left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}}\right) &= -\cos\tilde{q} \operatorname{sen}\tilde{q} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}}\left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}}\right) &= -2\omega \cos\tilde{q} \operatorname{sen}\tilde{q} \end{aligned}\right] \neq \;\Rightarrow\; \nexists K \text{ t.c. } (*)$$

possano essere portate nella forma di eq. di Hamilton

$\Downarrow$

La trasf. di coord. (o) NON è canonica!

ESEMPIO di trasformazione CANONICA

$$p_h = \alpha \tilde{p}_h$$
$$q_h = \beta \tilde{q}_h$$

Le eq. in (p,q) sono $\quad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}(p,q) \quad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(p,q)$

$\Rightarrow$ Le eq. diff. in $(\tilde{p},\tilde{q})$ sono

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_h}(\alpha\tilde{p},\beta\tilde{q}) \qquad \dot{\tilde{q}}_h = \frac{1}{\beta}\frac{\partial H}{\partial p_h}(\alpha\tilde{p},\beta\tilde{q})$$

I termini a destra dell'uguale sono scrivibili come

$-\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}(\tilde{p},\tilde{q})$ e $\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}(\hat{p},\tilde{q})$ per qualche $K(\tilde{p},\tilde{q})$?

La risposta è sì per

$$K(\tilde{p},\hat{q}) \equiv \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha\tilde{p},\beta\tilde{q}) \longleftarrow$$

$\exists$ un tale K $\forall$ scelta di H

$\Rightarrow$ La trasformazione è CANONICA.

TRASF. CANONICHE.

Scriviamo la trasf. di coord. nello sp. delle fasi:

$$(*)\quad \begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

$\equiv \vec{\tilde{p}}, \vec{\tilde{q}}$ (notazione semplificata)

coordinate p e q si mescolano

Nella notazione compatta:

anche scritta a volte

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) = x_i(\tilde{x}, t)$$

$J_{ij} = \dfrac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ ha detto

<u>Def.</u> La trasf. di coord. $(*)$, regolare e invertibile, si dice CANONICA, se comunque si prende un'Hamiltoniana $H(p, q, t)$, ESISTE SEMPRE una funzione $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. $\forall H$

se le eq. del moto nelle coord. (p, q) assumono la forma di eq. di Ham. per H, cioè

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad h = 1, \dots, n \qquad (\neq)$$

ALLORA anche le eq. del moto nelle nuove coord. assumono la forma di eq. di Ham. con Hamiltoniana K:

$$\dot{\tilde{p}}_k = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_k} \qquad \dot{\tilde{q}}_k = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_k} \qquad k = 1, \dots, n \qquad (\circ)$$

Le soluzioni di $(\neq)$ e $(\circ)$ sono collegate dalla trasf. $(*)$:

$$p_h(t) = u_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$$

$$q_h(t) = v_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$$

soluz. di $(\neq)$ — soluz. di $(\circ)$

H e K si dicono CANONICAMENTE CONIUGATE

Trasf. canoniche nel formalismo compatto

Consideriamo la trasf. di coord. nello spazio delle fasi data da

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) \qquad \bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$$

→ trasf. inversa $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$, cioè

$$\begin{cases} w(\tilde{w}(x,t),t) = x \\ \tilde{w}(w(\tilde{x},t),t) = \tilde{x} \end{cases}$$

Se il moto in T^*Q è descritto dalle funzioni

$$x_i(t) \qquad i = 1, \dots, 2n$$

nelle coord. x, allora nelle coord. $\tilde{x}$ sarà descritto dalle funzioni

$$\tilde{x}_j(t) = \tilde{w}_j(x(t), t)$$

← equivalentemente: $x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$

Da qta espressione, si può ricavare una relaz. tra le derivate $\dot{x}(t)$ e $\dot{\tilde{x}}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{2n} \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_i}}_{\equiv \tilde{J}_{ji}} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}$$

$\equiv \tilde{J}_{ji}$ (Jacobiano della trasf. di coord.)

↑ analogamente $\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_\ell} \equiv J_{m\ell}$ con $\sum_\ell J_{m\ell} \tilde{J}_{\ell j} = \delta_{mj}$

cioè $\tilde{J} = J^{-1}$

Ora, se $x(t)$ soddisfa l'eq. diff. $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), t)$, allora

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{J}_{ji}(x(t),t)\, f_i(x(t),t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(x(t),t)$$

usando $x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$, posso scrivere una relaz. tra $\dot{\tilde{x}}(t)$ e $\tilde{x}(t)$, cioè un'eq. diff. 1° ord per la funzione $\tilde{x}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_i \tilde{J}_{ji}(w(\tilde{x}(t),t),t)\, f_i(w(\tilde{x}(t),t),t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(w(\tilde{x}(t),t),t)$$

Diciamo ora che x_i sono buone coord. canoniche, cioè le eq. diff. del moto sono nella forma

$$\dot{x}_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} \longrightarrow f_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l}$$

Allora

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_{i,l} \tilde{J}_{ji} E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t} \qquad (*)$$

↳ in forma vettoriale $\quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{J} E \bar{\nabla}_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$

La trasf. è CANONICA se anche le nuove coord. $\tilde{x}_i$ sono buone coordinate canoniche, cioè se $\exists K(\tilde{x},t)$ t.c. le eq. del moto nelle coord $\tilde{x}$ sono nella forma

$$\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K \qquad (\star)$$

Confrontando $(*)$ con $(\star)$ si vede che la trasf. $\tilde{x} = \tilde{w}(\tilde{x},t)$ è canonica se $\forall H$, $\exists K$ t.c.

$$\tilde{J} E \bar{\nabla}_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K$$

Espressa per bene con tutti gli argomenti espliciti:

$$\tilde{J}(w(\tilde{x},t),t)\, E\, \bar{\nabla}_x H(w(\tilde{x},t),t) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x},t),t) = E\, \bar{\nabla}_{\tilde{x}} K(\tilde{x},t)$$

In particolare possiamo prendere $H=0$. Allora se la trasf. è canonica $\exists\, K_0(\tilde x,t)$ t.c.

$$\frac{\partial \tilde w}{\partial t}(w(\tilde x,t),t) = E\,\nabla_{\tilde x} K_0(\tilde x,t)$$

Cioè K_0 è l'Hamiltoniana coniugata all'Hamiltoniana nulla.

Esempi di trasf. canoniche

1) $$\underbrace{p_h = \tilde p_h + \overset{\text{cost.}}{a_h}}_{\equiv u_h(\tilde p,\tilde q,t)} \qquad q_h = \tilde q_h + \overset{\text{cost.}}{b_h} \qquad K(\tilde p,\tilde q,t) = H(\tilde p + a, \tilde q + b, t)$$

2) $$p_h = \alpha \tilde p_h \qquad q_h = \beta \tilde q_h \qquad \alpha,\beta \neq 0 \qquad K(\tilde p,\tilde q,t) = \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha\tilde p, \beta\tilde q, t)$$

3) $$p_h = \tilde p_h \qquad q_h = \tilde q_h + \alpha t \tilde p_h \qquad K(\tilde p,\tilde q,t) = H(\tilde p, \tilde q + \alpha t \tilde p, t) - \frac{\alpha}{2}\tilde p^2$$

↳ Es. particella libera

$$H(\bar p,\bar q) = \frac{\bar p^2}{2m}$$

$\alpha = 1/m$

$$K(\tilde p,\tilde q,t) = \frac{\tilde p^2}{2m} - \frac{1}{2m}\tilde p^2 = 0$$

→ eq. di Ham. relative a K:

$$\dot{\tilde p}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde q_h} = 0 \qquad \dot{\tilde q}_h = +\frac{\partial K}{\partial \tilde p_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde p_h(t) = \tilde p_h^{(0)} \qquad \tilde q_h(t) = \tilde q_h^{(0)} \quad \longrightarrow$$

usando la trasf. di coord. ⟶

$$p_h(t) = \tilde p_h^{(0)}$$
$$q_h(t) = \tilde q_h^{(0)} + t\,\frac{\tilde p_h^{(0)}}{m}$$

4) Invece la trasf. di coord.

$$p = \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q} \qquad q = \sqrt{2\tilde{p}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q}$$

è canonica con $K = H(\sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q}, \sqrt{2\tilde{p}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q}, t)$.

5) Trasformazioni PUNTUALI ESTESE

$$q_h = v_h(\tilde{q}, t) \qquad \text{(non dip. da } \tilde{p}\text{)}$$

$$p_h = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial v_k}{\partial q_h}}_{u_h(\tilde{p},\tilde{q},t)} \qquad \text{(non-generica)}$$

Vediamo qual è la forma generica della nuova Hamiltoniana.

Prop. Se la trasf. è CANONICA, allora $\exists c$ (dipendente al più dal tempo t) t.c.

$$K(\tilde{x},t) = c\,\tilde{H}(\tilde{x},t) + K_0(\tilde{x},t) \qquad (*)$$

dove:

- $\tilde{H}(\tilde{x},t) \equiv H(w(\tilde{x},t),t)$
- K_0 è t.c. $E\nabla_{\tilde{x}} K_0(\tilde{x},t) = \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x},t),t)$

[K_0 è l'Hamiltoniana coniugata ad $H=0$ ed è non-banale quando la trasf. canonica dip. da t esplicitam.]

Dim. trasf. canonica per ipotesi

$$E\nabla_{\tilde{x}}K \overset{\downarrow}{=} \tilde{J}E\nabla_x H + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} = E^{-1}E\tilde{J}E\tilde{J}^T\underbrace{(\tilde{J}^T)^{-1}\nabla_x H}_{} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} =$$

$$\sum_j J^T_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i}$$

$-E^{-1}=E$

$$= -E\,E\tilde{J}E\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} + E\nabla_{\tilde{x}}K_0$$

se trasf. è canonica, $\exists K_0$ t.c. $\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} = E\nabla_{\tilde{x}}K_0$

$$\Rightarrow -E\tilde{J}E\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} = \nabla_{\tilde{x}}(K-K_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow -E\tilde{J}E\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}$ è IRROTAZIONALE $\forall \tilde{H} \Rightarrow$

$$\Longrightarrow -E\tilde{J}E\tilde{J}^T = c\,\mathbb{1}_{2n} \Rightarrow \nabla_{\tilde{x}}(K - c\tilde{H} - K_0) = 0$$

Lemma 4 (vedi ultima pagina)

$\Rightarrow K = c\tilde{H} + K_0$ (a meno di una cost. irrilevante).

LEMMI utili per le dimostrazioni precedenti.

Lemma 1. Localmente, $\vec{v}$ è gradiente di una funz. F (cioè $\vec{v} = \vec{\nabla} F$) se e solo se il suo ROTORE è nullo, cioè $\partial_i v_j - \partial_j v_i = 0$. (Forme chiuse sono localmente esatte e viceversa.)

Lemma 2. Se $\tilde{J}$ è t.c. $\tilde{J}^T E \tilde{J} = cE$, allora

$$B = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1}$$

soddisfa $B^T E + E B = 0$, cioè EB è simmetrica.

Dim. Dimostriamo che $E \cdot \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1}$ è simmetrica:

differenziamo $\tilde{J}^T E \tilde{J} = cE \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E \tilde{J} + \tilde{J}^T E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} = 0$$

moltiplichiamo per $(\tilde{J}^T)^{-1}$ a sin. e $\tilde{J}^{-1}$ a des.

$$\rightarrow \underbrace{\tilde{J}^{-T} \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E}_{= -\left(E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1}\right)^T} + E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1} = 0$$

//

Lemma 3. Dato campo vett. $\bar{v}(x,t)$, può essere scritto come $\bar{v} = E\nabla_x F$, per qualche $F(x,t)$, $\iff$ $\Omega \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ soddisfa $\Omega^T E + E\Omega = 0$

cioè $E\Omega$ simm.

Dim. $\Rightarrow$: $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_k E_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \leftrightarrow \Omega = E(\partial^2 F)$

$\Rightarrow E\Omega$ è simm.

$\Leftarrow$: $\bar{u} \equiv E\bar{v} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = E\Omega$ simm.

$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \underset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \exists F$ t.c. $\bar{u} = -\nabla_x F \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v} = E\nabla_x F$ //

Lemma 4. Sia $A(x,t)$ matrice $2n \times 2n$ (con $x \in \mathbb{R}^{2n}$)

Se $\forall$ funz. regolare $F(x,t)$, il campo vett. $A\nabla_x F$ è IRROTAZIONALE (cioè ha rotore nullo $\iff$ (localm.) $= \nabla_x(\cdots)$) allora $\exists$ funz. $a(t)$ t.c. $A = a(t)\mathbb{1}$.

Dim. $A\nabla_x F$ irrotaz. $\overset{\forall F}{\longleftrightarrow}$ $\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l A_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l A_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \quad \forall F$ (0)

Prendiamo $F = x_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii}$ (1)

" $F = x_i^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ji} x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ii} x_i)$ (2)

$$(2) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ji} x_i) - \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ii} x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji}\right) x_i + A_{ji} - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii}\right) x_i - A_{ii}\delta_{ij}$$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} A_{ji} = A_{ii}\delta_{ij}$ (3) $\Rightarrow A$ è matrice diagonale

Inoltre (1), (3) $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_{ii}\,\delta_{ij} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} = 0 \quad \text{per } j \neq i$$

$$\Rightarrow A_{ij}(x,t) = a_i(x_i,t)\,\delta_{ij}$$

Mettiamo in (0):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l a_j(x_j,t)\,\delta_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l a_i(x_i,t)\,\delta_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \qquad \forall F$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_j(x_j,t) \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x_i,t) \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \forall F$$

$$\Rightarrow \text{per } i \neq j \quad \left[a_j(x_j,t) - a_i(x_i,t) \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall F$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_j(x_j,t)}_{\text{indip. da } x_i} = \underbrace{a_i(x_i,t)}_{\text{indip. da } x_j} \qquad i \neq j$$

$$\Rightarrow a_i(x_i,t) = a(t) \quad \forall i \; //$$