Capitolo 4

CONICHE

4.1 Coniche nel piano euclideo

A. Coniche come luoghi geometrici

L'ambiente in cui inizialmente studieremo le coniche è il piano euclideo $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$. Successivamente avremo bisogno anche di coordinate complesse, quindi "amplieremo" il nostro ambiente ad $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$: è intuitivamente chiaro che dall'inclusione canonica $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$, segue l'inclusione dei piani euclidei

$$\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}.$$

Le coniche sono note fino dai tempi più remoti come *luoghi geometrici*, cioè come insiemi di punti caratterizzati da proprietà geometriche.

Definizione 4.1.1.

a) Fissata una retta δ e un punto F del piano, il luogo dei punti equidistanti da δ e da F si dice *parabola* e il punto F e la retta δ sono detti, rispettivamente, *fuoco* e *direttrice* della parabola.

b) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2, il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *ellisse*.

c) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2, il luogo dei punti tali che la differenza delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *iperbole*.

Nei casi (b) e (c), i punti F_1 e F_2 sono detti *fuochi* dell'ellisse o dell'iperbole, rispettivamente

Per determinare le equazioni di questi luoghi geometrici, al fine di semplificare i calcoli, scegliamo opportunamente i punti e le rette in questione.

a) Siano, ad esempio, in un riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y)$:

$$\delta : \ y = -p/2, \quad F = (0, p/2).$$

Sia $P = (x, y)$ un generico punto del piano; il luogo geometrico in questione è caratterizzato dalla proprietà

$$d(P, \delta) = d(P, F).$$

Poiché la proiezione ortogonale di P su δ è il punto $P' = (x, -p/2)$ e $d(P, \delta) = d(P, P')$, la condizione precedente diventa:

$$\| P - P' \|^2 = \| P - F \|^2 \quad \text{cioè} \quad \| (0, y + p/2) \|^2 = \| (x, y - p/2) \|^2$$

quindi

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 = 2py.$$

b) Siano $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e sia k un numero reale positivo tale che $k > 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k. \tag{4.1}$$

Consideriamo le intersezioni di tale luogo geometrico con i semiassi positivi, cioè due punti del tipo $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, con $a > 0, b > 0$. Dal fatto che $d(A, F_1) + d(A, F_2) = k$, segue $k = 2a$; inoltre dalla relazione $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$ segue che $2\sqrt{q^2 + b^2} = k$. Quindi si hanno le uguaglianze

$$k = 2a, \quad q^2 = a^2 - b^2.$$

(Si osservi che, in particolare, si deduce $a \geq b$). Elevando al quadrato ambo i membri di (4.1), si ottiene:

$$\| (x + q, y) \|^2 + \| (x - q, y) \|^2 + 2 \ \| (x + q, y) \| \, \| (x - q, y) \| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + q^2).$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi, operando la sostituzione $q^2 = a^2 - b^2$, si ottiene l'equazione del luogo geometrico in questione in funzione dei due parametri a e b:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Se $q=0$, cioè se $a=b$, allora i fuochi F_1 ed F_2 coincidono nell'origine, l'ellisse si dice *circonferenza* e la sua equazione assume la forma

$$x^2+y^2=r^2$$

dove $r=a=b$ ed è detto *raggio* della circonferenza.

c) Fissiamo i punti $F_1=(-q,0)$, $F_2=(q,0)$ (con $q\geq 0$) e un numero reale positivo $k<2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P=(x,y)$ tali che

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=k. \tag{4.2}$$

Si osservi che, contrariamente al caso precedente, tale luogo geometrico non interseca l'asse y, in quanto ogni suo punto P è equidistante da F_1 e F_2, mentre $k\neq 0$.
Si consideri, invece, l'intersezione $A=(a,0)$ $(a>0)$ di tale luogo geometrico con il semiasse positivo delle x. Anche per A vale

$$k=|d(A,F_1)-d(A,F_2)|=|a+q-|a-q||.$$

Se fosse $|a-q|=a-q$, si avrebbe $k=2q$, contro l'ipotesi $k<2q$. Quindi deve essere $a<q$ e dunque la condizione precedente implica

$$k=|a+q+a-q|=2a.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di (4.2), si ottiene:

$$\parallel (x+q,y)\parallel^2+\parallel (x-q,y)\parallel^2 -2\ \parallel (x+q,y)\parallel\,\parallel (x-q,y)\parallel=4a^2$$

cioè

$$2(x^2+y^2+q^2)-2\sqrt{(x^2+y^2+q^2+2qx)(x^2+y^2+q^2-2qx)}=4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2+y^2+q^2)^2-4q^2x^2}=(x^2+y^2+q^2)-2a^2.$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene dunque:

$$-q^2x^2=a^4-a^2(x^2+y^2+q^2)$$

e quindi

$$(a^2-q^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-q^2).$$

Poiché $a < q$, la quantità $q^2 - a^2$ è sicuramente positiva; si ponga dunque, in analogia con quanto visto nel caso b), $q^2 - a^2 = b^2$; pertanto l'equazione del luogo geometrico in questione diventa:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per $-a^2b^2$ si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Osservazione 4.1.1. Da quanto visto in precedenza, segue che, se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py,$$

allora la sua direttrice ha equazione $y = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(0, p/2)$. Con procedimento del tutto analogo, se C è una parabola di equazione $y^2 = 2px$, allora la sua direttrice è $x = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(p/2, 0)$.
Se C è una ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e $a > b$, allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (con procedimento del tutto analogo, si vede che se $a < b$ allora i suoi fuochi sono i punti $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$).
Se C è un'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Esercizio. Che equazione ha un'iperbole i cui fuochi sono i punti $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$?

Definizione 4.1.2. Ricordiamo le rette e i punti notevoli di una conica.

i) Sia C una parabola di fuoco F e di direttrice δ;
- la retta ortogonale a δ e passante per F si dice *asse* di C;
- il punto di intersezione dell'asse con la parabola si dice *vertice*.

ii) Sia C un'ellisse di fuochi (distinti) F_1 e F_2;
- la retta per i fuochi si dice *asse maggiore*;
- la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse minore*;
- il punto di intersezione dell'asse maggiore e dell'asse minore (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C;

- i quattro punti di intersezione di C con gli assi si dicono *vertici*;
- la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici che appartengono all'asse maggiore si dice *semiasse maggiore* (analogamente si definisce il *semiasse minore*).

iii) Sia C un'iperbole di fuochi (distinti) F_1 e F_2;
- la retta per i fuochi si dice *asse trasverso*;
- la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse non trasverso*;
- il punto di intersezione dell'asse trasverso e dell'asse non trasverso (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C;
- i due punti di intersezione di C con l'asse trasverso si dicono *vertici*;
- la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici si dice *semiasse trasverso.*

Esempio 4.1.1. La parabola vista sopra: $x^2 = 2py$ ha fuoco $F = (0, p/2)$ e direttrice $\delta : y = -p/2$. Dunque il suo asse è $x = 0$ e il suo vertice è soluzione del sistema $x = 0 = x^2 - 2py$ e pertanto è il punto $(0, 0)$.
L'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ha come asse maggiore la retta per i due fuochi $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$, cioè la retta $y = 0$ e come asse minore la retta $x = 0$. Il centro è quindi il punto $(0, 0)$.

Definizione 4.1.3. Sia C un luogo geometrico.

a) Una retta r si dice *asse di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a r appartiene ancora a C;

b) un punto O si dice *centro di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a O appartiene ancora a C.

Proposizione 4.1.1.

i) Se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py$$

allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un iperbole, di equazioni rispettive

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è centro di simmetria.

Dimostrazione. i) Come visto nell'esempio precedente, l'asse di C è la retta $x = 0$ che risulta asse di simmetria per C. Infatti, se $P = (x_0, y_0) \in C$ allora vale $x_0^2 = 2py_0$. Il punto simmetrico di P rispetto all'asse y è $P' = (-x_0, y_0)$, che appartiene ancora a C in quanto $2py_0 = x_0^2 = (-x_0)^2$. Inoltre il vertice è l'origine $(0, 0)$, che è chiaramente equidistante da δ e dal fuoco F.
ii) Se C è l'ellisse considerata, nel caso in cui $a > b$ per l'Osservazione 4.1.1 i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, dunque l'asse maggiore è la retta $y = 0$. L'asse minore è ovviamente la retta $x = 0$, quindi il centro di C è l'origine. Il caso $a < b$ è analogo.
Se un punto $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione di C, allora anche i punti $P' = (x_0, -y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse x), $P'' = (-x_0, y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse y), $P''' = (-x_0, -y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'origine), verificano la stessa equazione. Dunque gli assi dell'ellisse sono assi di simmetria e il centro è il centro di simmetria.
Infine sia C l'iperbole data; ancora per l'Osservazione 4.1.1 i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, dunque l'asse trasverso è la retta $y = 0$. L'asse non trasverso è la retta $x = 0$, quindi il centro di C è l'origine.
Se un punto $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione di C, allora anche i punti $P' = (x_0, -y_0)$, $P'' = (-x_0, y_0)$, $P''' = (-x_0, -y_0)$ verificano la stessa equazione. $\square$

Definizione 4.1.4. Una conica si dice *conica a centro* se è una ellisse o una iperbole.

B. Equazione di una conica generale e sua forma matriciale

Nella parte precedente del paragrafo abbiamo visto che, in un opportuno sistema di riferimento, una parabola, un'ellisse e un'iperbole hanno una equazione del tipo

$$x^2 = 2py; \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.3}$$

E' evidente, però, che tali equazioni non sono le più generali, infatti i luoghi geometrici di cui sopra sono in una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani (che, ad esempio, nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, sono i loro assi di simmetria).
Ciò che accomuna le tre equazioni precedenti è il fatto che sono tutte associate a polinomi di secondo grado nelle variabili x e y.

Definizione 4.1.5. Si dice *conica* il luogo dei punti di $\mathbb{E}^2$ aventi coordinate (x, y) che soddisfano una equazione polinomiale di secondo grado a coefficienti reali in due variabili, cioè una equazione del tipo:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0 \tag{4.4}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$. La denominazione dei coefficienti (con due indici) come pure il fattore 2 nei coefficienti di alcuni monomi sono dovuti a motivi pratici, che risulteranno chiari a breve.

Tratteremo generalmente i punti *reali* di una conica, tuttavia in alcuni contesti considereremo anche i punti a coordinate *complesse*, tenendo conto dell'inclusione $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$.

Osservazione 4.1.2. Le coniche di (4.3) sono casi particolari dell'equazione generale (4.4); ad esempio la prima si ottiene per

$$a_{11} = 1, \quad a_{23} = -p, \quad a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$$

e analogamente le altre; si osservi che in tutte le equazioni (4.3) il coefficiente a_{12} del monomio xy è nullo.

Ci chiediamo se ogni equazione del tipo (4.4) descrive uno dei luoghi geometrici precedentemente definiti (cioè se è una parabola, un'ellisse o un'iperbole). Tale domanda, così formulata, ha chiaramente risposta negativa. Infatti, ad esempio, il polinomio $x^2 - y^2$ si fattorizza nel prodotto $(x + y)(x - y)$ e quindi la conica di equazione $x^2 - y^2 = 0$ risulta essere l'unione delle due rette di equazione $x + y = 0$ e $x - y = 0$.
Più in generale, ogni equazione di secondo grado del tipo

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

rappresenta l'unione di due rette. Tali rette non sempre sono reali. Ad esempio si consideri l'equazione $x^2 + y^2 = 0$. In $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ tale equazione ha la sola soluzione $(0, 0)$, mentre in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$, poiché $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, corrisponde all'unione delle due rette complesse e coniugate $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.

Definizione 4.1.6. Una conica si dice *degenere* se è unione di due rette (che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate).

Nel seguito utilizzeremo ampiamente una scrittura più sintetica ma equivalente all'equazione (4.4).

Definizione 4.1.7. Sia C la generica conica di equazione (4.4), cioè

$$C: \ a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0.$$

Le matrici

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sono dette, rispettivamente, *matrice dei coefficienti* e *matrice della forma quadratica* di C.

Osservazione 4.1.3. L'equazione (4.4) di una conica C diventa dunque

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \; B \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Inoltre la parte omogenea di secondo grado del polinomio che definisce la conica C, cioè

$$F_C(x, y) := a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2$$

è una *forma quadratica*, esprimibile anch'essa in termini di matrici come

$$F_C(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \; A \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.1.2. Le matrici associate alla parabola $y = 3x^2$ sono:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.1.4. Si noti che i 6 coefficienti a_{ij} che compaiono in (4.4) individuano una conica, ma non viceversa; infatti per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'equazione

$$ka_{11}\, x^2 + 2\, ka_{12}\, xy + ka_{22}\, y^2 + 2\, ka_{13}\, x + 2\, ka_{23}\, y + ka_{33} = 0$$

definisce lo stesso luogo di punti del piano, cioè la stessa conica. Pertanto ogni conica è individuata da ∞^1 equazioni o, più precisamente, da ∞^1 sestuple di coefficienti, tutte tra loro proporzionali.

4.2 Forma canonica: traslazioni

Vogliamo risolvere il seguente problema: data una conica non degenere in forma generale, esiste un riferimento cartesiano del piano euclideo in cui tale conica assume una forma particolarmente semplice, cioè una forma “simile” a quelle di (4.3)? O, più in generale, in cui la matrice A è diagonale? A tale scopo introduciamo la seguente importante nozione.

Definizione 4.2.1. Si dice *forma canonica* di una conica non degenere C una sua equazione in riferimento cartesiano $(O; x, y)$ che è di una delle seguenti forme:

$$\begin{array}{rlrl} (P.i) & x^2 = 2py & (P.ii) & y^2 = 2px \\ (E.i) & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (E.ii) & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \\ (I.i) & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (I.ii) & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \end{array}$$

dove p, a, b sono non nulli. La conica C viene detta, rispettivamente:
- *parabola*, nei casi $(P.i)$ e $(P.ii)$;
- *ellisse reale*, nel caso $(E.i)$;
- *ellisse immaginaria*, nel caso $(E.ii)$;
- *iperbole*, nei casi $(I.i)$ e $(I.ii)$.

Risolveremo il problema iniziale in due passi successivi: dapprima, in questo paragrafo, ci limiteremo a coniche nella cui equazione non appare il monomio xy, cioè tali $a_{12} = 0$; vedremo che il sistema di riferimento cercato è ottenibile mediante traslazione. Nel prossimo paragrafo vedremo che, data una conica in forma generale, il riferimento in cui si annulla il coefficiente del monomio xy si otterrà mediante una rotazione. La procedura globale per ottenere una forma canonica di una conica risulterà essere, quindi, una rototraslazione del piano, cioè un'isometria diretta di $\mathbb{E}^2$.

Esempio 4.2.1. Sia $\Gamma : \; y = 2x^2$ una parabola in forma canonica; vediamo come varia l'equazione di Γ se operiamo la traslazione del piano

$$t_{(-\alpha,-\beta)} : \quad \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione di Γ in $(O'; X, Y)$:

$$Y = 2X^2 + 4\alpha X + 2\alpha^2 - \beta.$$

Esempio 4.2.2. Sia $\Gamma' : \; x^2 + 2y^2 = 1$ un'ellisse in forma canonica; con la traslazione $t_{(-\alpha,-\beta)}$ dell'esempio precedente, l'equazione di Γ' diventa:

$$X^2 + 2Y^2 + 2\alpha X + 4\beta Y + \alpha^2 + 2\beta^2 - 1 = 0.$$

Si osservi che, attraverso la traslazione $t_{(-\alpha,-\beta)}$, le coniche Γ e Γ' passano dalla forma canonica a una nuova forma nella quale il coefficiente a_{12} è zero. Proviamo ora il viceversa: se una conica ha una equazione priva del monomio xy, la si può ridurre a forma canonica operando una traslazione.

Osservazione 4.2.1 (*Metodo del completamento dei quadrati)***.**
Si consideri, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di $\mathbb{E}^2$, una conica non degenere con equazione priva del monomio xy

$$C : \; a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0. \tag{4.5}$$

Si possono presentare due casi: o entrambi i coefficienti a_{11} e a_{22} sono non nulli oppure uno dei due è nullo.
I. <u>Caso $a_{11} = 0, \; a_{22} \neq 0$.</u>
(il caso $a_{11} \neq 0, \; a_{22} = 0$ è del tutto analogo).
L'equazione (4.5) diventa dunque:

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y + a_{33} + 2\, a_{13}\, x = 0. \tag{4.6}$$

Poiché

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y = a_{22} \left(y^2 + 2\, \frac{a_{23}}{a_{22}}\, y \right) = a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} \tag{4.7}$$

l'equazione (4.6) diventa:

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + a_{33} + 2\, a_{13}\, x = 0. \tag{4.8}$$

Poiché si suppone C non degenere, allora $a_{13} \neq 0$ e quindi

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 + 2\, a_{13} \left(x + \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \right) = 0$$

da cui

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 = -\frac{2\, a_{13}}{a_{22}} \left(x + \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \right).$$

Quindi con la traslazione

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{2\, a_{22}a_{13}} \\[2ex] Y = y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

e ponendo $p = -a_{13}/a_{22}$, si ottiene la forma canonica:

$$Y^2 = 2\,p\,X.$$

Il caso $a_{11} \neq 0,\ a_{22} = 0$ è analogo e conduce (nell'ipotesi non degenere, cioè $a_{23} \neq 0$) alla forma canonica

$$X^2 = 2\,p\,Y.$$

Se non richiediamo alla conica in questione di essere non degenere, dobbiamo esaminare anche il caso $a_{13} = 0$ (rispettivamente, $a_{23} = 0$); in questo caso l'equazione (4.8) diventa:

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = \frac{a_{23}^2 - a_{33}a_{22}}{a_{22}^2}$$

e con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

assume la forma

$$Y^2 = q \quad (X^2 = q). \tag{4.9}$$

II. <u>Caso $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0$.</u>

Ovviamente, a meno di un cambio di segno nell'equazione (4.5), si può supporre $a_{11} > 0$. Tenendo conto dell'uguaglianza (4.7) e dell'analoga

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{13}\,x = a_{11}\left(x^2 + 2\,\frac{a_{13}}{a_{11}}\,x\right) = a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}$$

l'equazione (4.5) diventa:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0.$$

Se si pone $h = -a_{33} + \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$ e si opera la traslazione

$$\begin{cases} X &= x + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ Y &= y + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica C ha equazione

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 = h. \tag{4.10}$$

Se $h \neq 0$ si ha chiaramente

$$\frac{a_{11}}{h}\,X^2 + \frac{a_{22}}{h}\,Y^2 = 1. \tag{4.11}$$

II.a) Caso $a_{11} > 0,\ a_{22} > 0$.

- se $h > 0$ i coefficienti della (4.11) sono strettamente positivi quindi possiamo porre $a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. In tal caso l'equazione (4.11) diventa:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

- se $h < 0$ si ponga $-a_{11}/h = 1/a^2$ e $-a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione (4.11) diventa

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, ponendo nell'equazione (4.10) $a_{11} = 1/a^2$ e $a_{22} = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{4.12}$$

II.b) Caso $a_{11} > 0,\ a_{22} < 0$.
Con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si hanno i seguenti casi.

- se $h > 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

- se $h < 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{4.13}$$

Osservazione 4.2.2. Esaminiamo geometricamente le tre coniche particolari emerse nella costruzione precedente.
-) La conica C di equazione (4.9), cioè

$$x^2 = q \quad (\text{rispettivamente } y^2 = q)$$

è l'unione delle rette $x = \pm\sqrt{q}$. Se $q > 0$, tali rette sono reali e distinte e parallele all'asse y; se $q < 0$ tali rette sono complesse e coniugate; infine se $q = 0$ la conica C risulta essere l'asse y "contato due volte", cioè costituita da due rette coincidenti.
-) Si noti poi che l'equazione (4.12), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

è soddisfatta da un solo punto a coordinate reali: l'origine $(0,0)$; mentre nel piano complesso $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ tale conica è l'unione di due rette complesse e coniugate, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{C}[x,y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + i\,\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\,\frac{y}{b}\right).$$

-) Infine l'equazione (4.13), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

corrisponde all'unione di due rette reali e distinte, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{R}[x,y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Quanto precede conduce a provare il seguente fatto.

Osservazione 4.2.3. L'equazione (4.10) rappresenta una conica non degenere se e solo se $h \neq 0$.
Infatti, col *Metodo di completamento dei quadrati*, si è provato che, se $h \neq 0$ allora si ottiene una forma canonica di tipo $(E.i)$, $(E.ii)$, $(I.i)$ o $(I.ii)$, cioè una conica a centro non degenere.
Viceversa, se $h = 0$ si ottiene un'equazione dei tipi (4.12) o (4.13), le quali, come osservato sopra, rappresentano coniche degeneri.

E' naturale, dopo lo studio precedente, dare la seguente nozione.

Definizione 4.2.2. Si dice *forma canonica* di una conica degenere una delle equazioni del tipo (4.9), (4.12), (4.13) e le corrispondenti coniche si diranno *degeneri di tipo parabolico, ellittico, iperbolico*, rispettivamente. In analogia con la Definizione 4.2.1, le denoteremo, rispettivamente, con le sigle $(P.iii)$, $(E.iii)$, $(I.iii)$.

Definizione 4.2.3. Una conica si dice *semplicemente* degenere se è unione di due rette distinte e *doppiamente* degenere se è unione di due rette coincidenti.

La procedura vista nell'Osservazione 4.2.1 prova il seguente risultato.

Teorema 4.2.1. *Sia C una conica (degenere o non degenere) di equazione priva del monomio xy in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante traslazione, in cui C si esprime con un'equazione in forma canonica.*

Esempio 4.2.3. Sia C la conica di equazione

$$C : \quad x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0.$$

Applicando il metodo del completamento dei quadrati, poiché

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \ , \quad 4y^2 - 12y = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 9$$

si ha:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = (x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 7.$$

Pertanto, operando la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'equazione di C diventa

$$X^2 + 4Y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{7/4} = 1.$$

Si tratta quindi di una ellisse di centro $(-1, 3/2)$, assi le rette $x = -1$ e $y = 3/2$ e semiassi $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}/2$.

Infine si possono determinare i 4 vertici dell'ellisse intersecandola con gli assi, sia nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ che nel sistema $(O'; X, Y)$ (si confrontino i risultati ottenuti con i due metodi).

APPENDICE
Matrici congruenti e matrici simili

Definizione 4.2.4. Sia K un campo. Due matrici $A, A' \in K^{n,n}$ si dicono *congruenti* se esiste una matrice $P \in GL(n, K)$ tale che

$$A' = {}^tPAP.$$

Definizione 4.2.5. Due matrici $A, A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dicono *(ortogonalmente) simili* se esiste una matrice $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che

$$A' = P^{-1}AP.$$

Si prova facilmente (✍) che la congruenza e la similitudine sono relazioni di equivalenza nell'insieme $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici quadrate.

Inoltre, ricordando che una matrice ortogonale $P \in O(n, \mathbb{R})$ verifica $P^{-1} = {}^tP$, è chiaro che due matrici simili sono anche congruenti (ma non viceversa!).

Ricordiamo alcune proprietà delle matrici congruenti e di quelle simili.

Proposizione 4.2.2. *Siano $A, A' \in K^{n,n}$ due matrici congruenti:*

$$A' = {}^tPAP, \quad \textit{dove} \quad P \in GL(n, K).$$

Allora

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A').$$

Inoltre, se $K = \mathbb{R}$, i determinanti di A e di A' hanno lo stesso segno. In particolare, se $\det(P) = \pm 1$ *vale anche*

$$\det(A) = \det(A').$$

Dimostrazione. Denotando con f_M l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, si ha

$$f_{A'} = f_{{}^tP} \circ f_A \circ f_P.$$

Poiché f_P e $f_{{}^tP}$ sono isomorfismi, si ha $\dim \mathrm{Im}(f_{A'}) = \dim \mathrm{Im}(f_A)$. Ma $\mathrm{rk}(A') = \dim \mathrm{Im}(f_{A'})$ e $\mathrm{rk}(A) = \dim \mathrm{Im}(f_A)$ e quindi si ha la tesi.
L'ulteriore affermazione, nel caso $K = \mathbb{R}$, segue dal Teorema di Binet:

$$\det(A') = \det({}^tP\ A\ P) = \det({}^tP)\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P)^2$$

ed essendo $\det(P)^2 > 0$, segue che $\det(A')$ e $\det(A)$ hanno lo stesso segno. Infine, sempre dalla precedente relazione, si ha che $\det(A') = \det(A)$ se $\det(P)^2 = 1$. □

Proposizione 4.2.3. *Siano* $A, A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ *due matrici simili:*

$$A' = P^{-1}AP, \quad \textit{dove} \quad P \in O(n, \mathbb{R}).$$

Allora

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A'),$$
$$\det(A) = \det(A')$$

e i polinomi caratteristici di A *e di* A', $p_A(T)$ *e* $p_{A'}(T)$, *coincidono.*

Dimostrazione. Avendo osservato che due matrici simili sono congruenti, i ranghi e i determinanti coincidono per la Proposizione 4.2.2. L'ultima affermazione è stata dimostrata nel precedente corso di Algebra lineare. □

4.3 Forma canonica: rotazioni

Esempio 4.3.1. Nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, sia data la parabola Γ di equazione (canonica) $y = x^2$. Vogliamo determinare l'equazione di Γ nel sistema di riferimento $(O; X, Y)$ ottenuto dal precedente mediante la seguente rotazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di Γ, si ottiene

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \Rightarrow X^2 + 2XY + Y^2 + \sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0.$$

In questo esempio si vede che, per effetto della rotazione, nella ultima equazione della conica appare il monomio XY. E' naturale chiedersi se vale il viceversa, cioè se sia possibile, attraverso una rotazione, passare da un'equazione che contiene il monomio XY a una che non lo contiene. In altri termini, vogliamo determinare un riferimento in cui la matrice della forma quadratica di una conica è diagonale. Il teorema di diagonalizzazione delle matrici reali simmetriche garantisce che ciò è possibile.

Iniziamo con un risultato che lega le equazioni di una conica in due diversi riferimenti cartesiani.

Teorema 4.3.1. *Siano $(O; x, y)$ e $(O'; X, Y)$ due riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^2$ e siano Q e P, rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio speciale di riferimento dal primo al secondo. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste*

$$B' := {}^tQ\; B\; Q \qquad e \qquad A' := {}^tP\; A\; P = P^{-1}\; A\; P,$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; X, Y)$.
In particolare, B e B' sono congruenti e A e A' sono simili.

Dimostrazione. Siano

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove la matrice P è ortogonale speciale, dunque ${}^tP = P^{-1}$ e $\det(P) = 1$.
Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Trasponendo ambo i membri:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} {}^tQ. \tag{4.15}$$

La conica C, nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, ha equazione

$$C: \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \ B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi, operando le sostituzioni (4.14) e (4.15) si ottiene

$$C: \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} {}^tQ\, B\, Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è l'equazione di C nel riferimento $(O'; X, Y)$. Si osservi che $B' = {}^tQBQ$ è ancora una matrice simmetrica, come deve essere in quanto matrice di una conica.
Con un facile calcolo, si vede che la matrice A' della forma quadratica di C nel riferimento $(O'; X, Y)$, cioè la sottomatrice 2×2 di B' ottenuta intersecando le prime due righe con le prime due colonne, è esattamente

$$A' = {}^tPAP = P^{-1}AP$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che P è ortogonale. □

Esempio 4.3.2. Riduciamo a forma canonica la conica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo A come al solito, calcolandone il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autospazi e quindi una base di autovettori per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ad essa associato:

$$p_A(T) = |A - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2 - 1 = T^2 - 2T = T(T-2)$$

da cui si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

e gli autospazi associati:

$$V_0 = \ker(f_A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \langle (1,1) \rangle$$
$$V_2 = \ker(f_{A-2I}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \langle (1,-1) \rangle.$$

Pertanto la matrice ortogonale speciale P che esprime l'opportuno cambiamento di base è:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(Si noti che l'ordine degli autovettori è scambiato per ottenere $\det(P) = 1$). Se non operiamo alcuna traslazione, la matrice di rototraslazione ha la forma:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice della conica C nel sistema di riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$, dove

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{Q} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{y} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{y} \end{cases} \tag{4.16}$$

diventa dunque, per il Teorema 4.3.1,

$$\overline{B} = {}^t\overline{Q}\, B\, \overline{Q} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'equazione di C nel nuovo sistema di riferimento risulta:

$$2\overline{x}^2 + 4\sqrt{2}\overline{y} - 1 = 0$$

da cui

$$\overline{x}^2 = -2\sqrt{2}\left(\overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

Operando dunque la traslazione

$$\begin{cases} X = \overline{x} \\ Y = \overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \tag{4.17}$$

si ottiene la parabola, in forma canonica:

$$X^2 = -2\sqrt{2}\, Y.$$

Chiaramente si può procedere alla rototraslazione globale mediante la matrice Q che esprima sia la precedente rotazione, sia la traslazione sopra scritta. Da (4.16) e (4.17) si hanno le equazioni della rototraslazione

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{8} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y + \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{da cui} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine si può verificare che la matrice della conica nel riferimento $(O'; X, Y)$ diventa

$$\begin{aligned} &{}^tQ\, B\, Q = \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = B'. \end{aligned}$$

L'esempio precedente suggerisce un metodo generale per la riduzione di una conica a forma canonica: è la dimostrazione (costruttiva) del seguente risultato.

Teorema 4.3.2. *Sia C una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di $\mathbb{E}^2$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante rototraslazione, in cui C ha un'equazione in forma canonica.*

Dimostrazione. Siano A e B le matrici associate a C nel riferimento $(O; x, y)$.
i) Diagonalizzazione di A.
- Se $a_{12} = 0$ (cioè se A è diagonale) si passa al punto iii).
- Se $a_{12} \neq 0$, si diagonalizza A nel modo consueto, determinando una base ortonormale di autovettori: $v_1 = (p_{11}, p_{21})$, $v_2 = (p_{12}, p_{22})$, in modo che la matrice ortogonale

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

sia speciale.

ii) Posta

$$\overline{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si opera la rotazione corrispondente

$$\begin{cases} x = p_{11}\overline{x} + p_{12}\overline{y} \\ y = p_{21}\overline{x} + p_{22}\overline{y} \end{cases}. \tag{4.18}$$

Nel riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$ la conica ha matrice $\overline{B} = {}^t\overline{Q}B\overline{Q}$ e matrice della forma quadratica $\overline{A} = {}^tPAP$, che risulta dunque diagonale. Pertanto in tale riferimento la conica ha equazione

$$\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} & 1 \end{pmatrix} \overline{B} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è priva del monomio $\overline{xy}$.

iii) Si opera la traslazione da $(O; \overline{x}, \overline{y})$ a $(O'; X, Y)$ indotta dal *Metodo del completamento dei quadrati*

$$\begin{cases} X = \overline{x} + \alpha \\ Y = \overline{y} + \beta \end{cases}. \tag{4.19}$$

Per ottenere la forma canonica di C, cioè la sua equazione nel sistema $(O'; X, Y)$, basta operare la sostituzione inversa di (4.19) nell'equazione della conica in $(O; \overline{x}, \overline{y})$.

iv) Infine la rototraslazione da $(O; x, y)$ a $(O'; X, Y)$ si ottiene sostituendo la relazione inversa di (4.19) in (4.18). □

Osservazione 4.3.1. Il precedente teorema può essere riformulato così: data una conica C esiste una rototraslazione φ tale che $\varphi(C)$ è espressa in forma canonica.

Corollario 4.3.3. *Data un'equazione di secondo grado in x e y a coefficienti reali, il luogo degli zeri (in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$) di tale equazione, se contiene almeno due punti reali, è uno dei seguenti luoghi geometrici: ellisse, iperbole, parabola, unione di due rette (distinte o coincidenti).*