

Introduzione alla fisica

261SM

Gas ideali e temperatura

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it



Termodinamica

“If physical theories were people, thermodynamics would be the village witch. Over the course of three centuries, she smiled quietly as other theories rose and withered, surviving major revolutions in physics, like the advent of general relativity and quantum mechanics. The other theories find her somewhat odd, somehow different in nature from the rest, yet everyone comes to her for advice, and no one dares to contradict her. Einstein, for instance, called her ‘the only physical theory of universal content, which I am convinced, that within the framework of applicability of its basic concepts will never be overthrown’.”

J. Goold, et al. J. Phys. A 49 143001 (2016).

Termodinamica

“Se le teorie fisiche fossero persone, la termodinamica sarebbe la maga del villaggio. Nel corso di tre secoli, ha sorriso discretamente mentre altre teorie nascevano e appassivano, sopravvivendo a grandi rivoluzioni della fisica, come l'avvento della relatività generale e della meccanica quantistica. Le altre teorie la trovano un po' strana, in qualche modo diversa per natura dalle altre, eppure tutti vengono da lei per un consiglio, e nessuno osa contraddirla. Einstein, per esempio, la definì 'l'unica teoria fisica a contenuto universale, che sono convinto, nell'ambito di applicabilità dei suoi concetti fondamentali, non sarà mai rovesciata'.”

Teoria cinetica dei gas

Alcuni pionieri



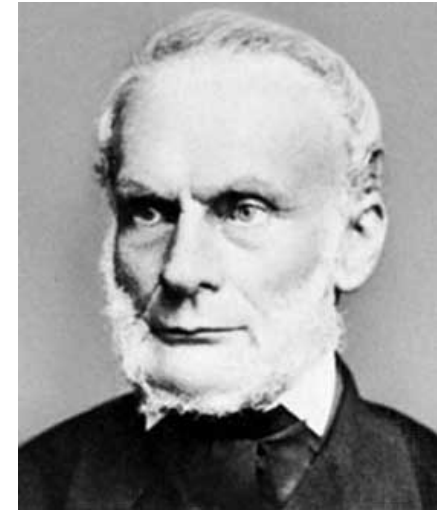
Daniel Bernoulli
(1700 - 1782)

... risultati dimenticati per un secolo quasi intero



John James Waterston
(1811 - 1883)

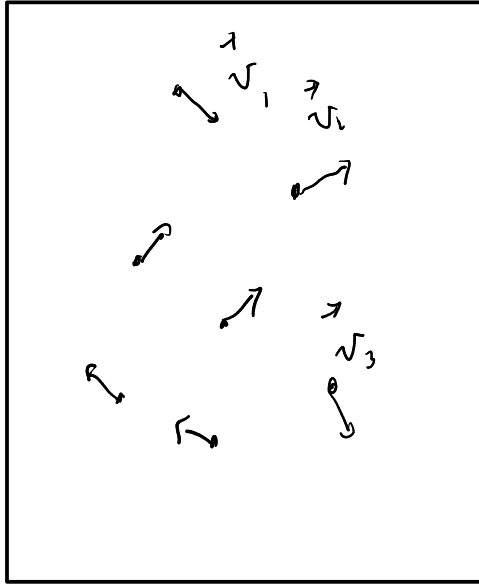
... ha presentato le sue scoperte alle Philosophical Transactions.
Risposta: "nothing but nonsense".
Lord Rayleigh trovò e pubblicò il manoscritto nel 1893 (48 anni dopo).



Rudolf Clausius
(1822 - 1888)

...espone la sua teoria nel 1857 in un articolo intitolato "Über die Art der Bewegung die wir Wärme nennen" ("Sulla natura del moto che chiamiamo calore")

Teoria cinetica dei gas



N : numero di particelle

\vec{r}_i : posizioni

\vec{v}_i : velocità

V : volume della scatola

m : massa di un particella

* centro di massa: $\vec{r}_{cm} = \sum_i \frac{m \vec{r}_i}{Nm} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{r}_i$

* quantità di moto = $\sum_i m \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \vec{r}_{cm}$ costante

* energia cinetica totale: $\sum \frac{1}{2} m v_i^2 = U$ energia interna

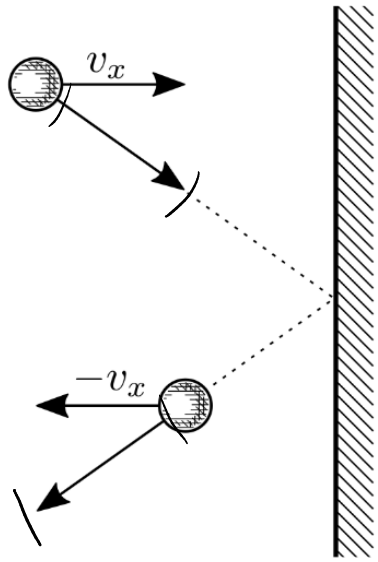
Ipotesi

- Un gas è composto da un gran numero di molecole.
- Le molecole sono piccole rispetto alla loro separazione.
- Le molecole si muovono in modo casuale.
- Le molecole obbediscono alle leggi del moto di Newton.
- Le molecole non sentono alcuna forza se non quando collidono elasticamente con altre molecole o con le pareti del contenitore (sfere rigide).

Teoria cinetica - pressione

Cambio di quantità di moto dopo un urto con la parete

$$\Delta p = -2mv_x$$

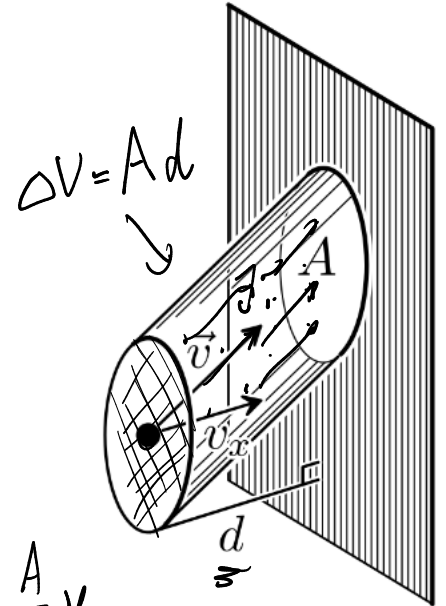


- * tempo per raggiungere la parete: $\Delta t = \frac{d}{v_x}$
- * Quante particelle in questo volume?

volume del contenitore $\rightarrow \frac{N \Delta V}{V} = N \frac{Ad}{V}$

- * Quanti urti al secondo ci sono con la parete?

$$R = \# \text{ collisioni / secondo} = N \frac{Ad}{V} \frac{1}{\Delta t} = N \frac{Ad}{V} \frac{v_x}{d} = N \frac{A}{V} v_x$$



Teoria cinetica - pressione

Ogni urto risulta in un cambiamento di quantità di moto di $\Delta p = -2m v_x$

* Forza media dalla parete : $\Delta p \times R = -\frac{2mNA}{V} v_x^2$

* Media su tutte le velocità \rightarrow

$$\langle F \rangle = \left\langle -\frac{2mNA}{V} v_x^2 \right\rangle = -\frac{2mNA}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

solo metà delle particelle hanno una componente positiva di v_x

$$\Rightarrow \langle F \rangle = -\frac{mNA}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

$$\frac{\langle F \rangle}{A} = -\frac{mN}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$$

$$= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

$$= 3 \langle v_x^2 \rangle$$

Teoria cinetica - pressione

$$P = \frac{\langle F \rangle}{A} = \underbrace{\frac{mN}{V}}_{\text{densità } \rho} \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

$$P = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle$$

sempre valido
(gas ideale)

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

aria: $P \approx 100 \text{ kPa}$
 $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$

$$\Rightarrow v_{\text{rms}} \approx 500 \text{ m/s}$$

Teoria cinetica – energia interna

Velocità quadratica media: $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i v_i^2}$
"root mean square"

Energia interna per un gas monoatomico:

$$U = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m N \left(\frac{1}{N} \sum_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m N \langle v^2 \rangle$$

Con il nostro risultato precedente,

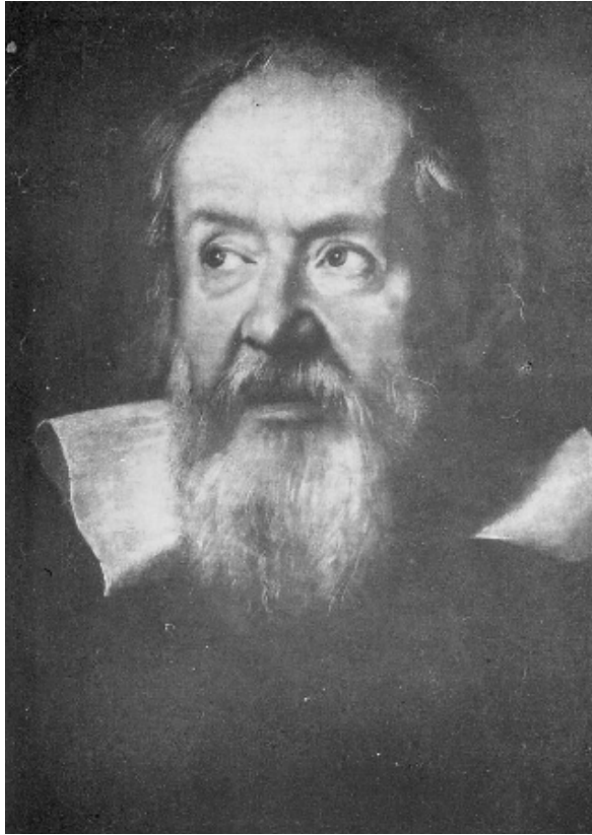
$$P = \frac{1}{3} \frac{m N}{V} \langle v^2 \rangle$$

$$= \frac{2}{3} \frac{U}{V}$$

$$\boxed{PV = \frac{2}{3} U} \quad (\text{gas monoatomico})$$

(* per molecole poliatomiche, l'energia interna include anche energia di rotazione e di vibrazione)

Il termoscopio di Galileo

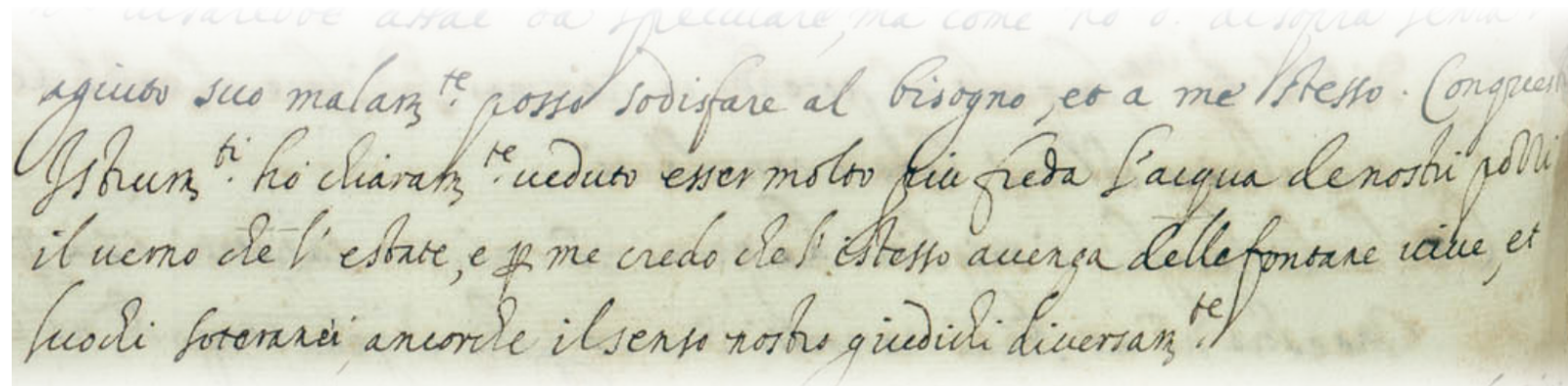


Galileo Galilei
(1564 - 1642)



Source: <https://catalogue.museogalileo.it/gallery/Thermoscope.html>

Temperatura

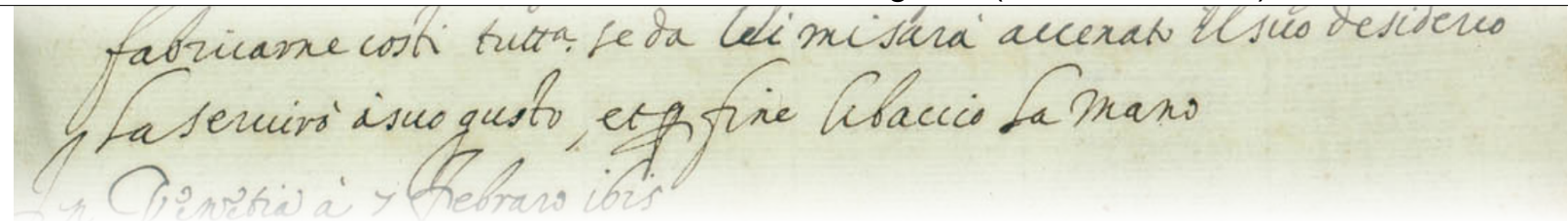


... Con questi istrumenti ho chiaramente veduto, esser molto più freda l'acqua de' nostri pozzi il verno che l'estate; e per me credo che l'istesso avenga delle fontane vive et luochi sotteranei, anchorchè il senso nostro giudichi diversamente.

... Con questi istrumenti ho chiaramente veduto, esser molto più freda l'acqua de' nostri pozzi il verno che l'estate; e per me credo che l'istesso avenga delle fontane vive et luochi sotteranei, anchorchè il senso nostro giudichi diversamente.

... E per fine li baccio la mano.

Lettera a Galileo dal suo studente, Giovanfrancesco Sagredo (7 febbraio 1615)



fabricarne costì tutto, se da lei mi sarà accerato il suo desiderio
e la servirò a suo gusto, et per fine li baccio la mano
In Venezia il 7 Febbraio 1615

Gal. 90 - II, Galileo. VI.9, Galilei Galileo. 80, Lettere scientifiche.

Temperatura

- Prime scale:
 - Numero arbitrario di separazioni ("gradi") tra due punti ben definiti.
- Fahrenheit:
 - 0°F → punto di congelamento dell'acqua satura di sale
 - 100°F → temperatura corporea normale
(e successivamente, 321°F → punto di ebollizione dell'acqua a livello del mare)
- Centigrado (poi divenuto Celsius):
 - 0°C → punto di congelamento dell'acqua dolce
 - 100°C → punto di ebollizione dell'acqua a livello del mare

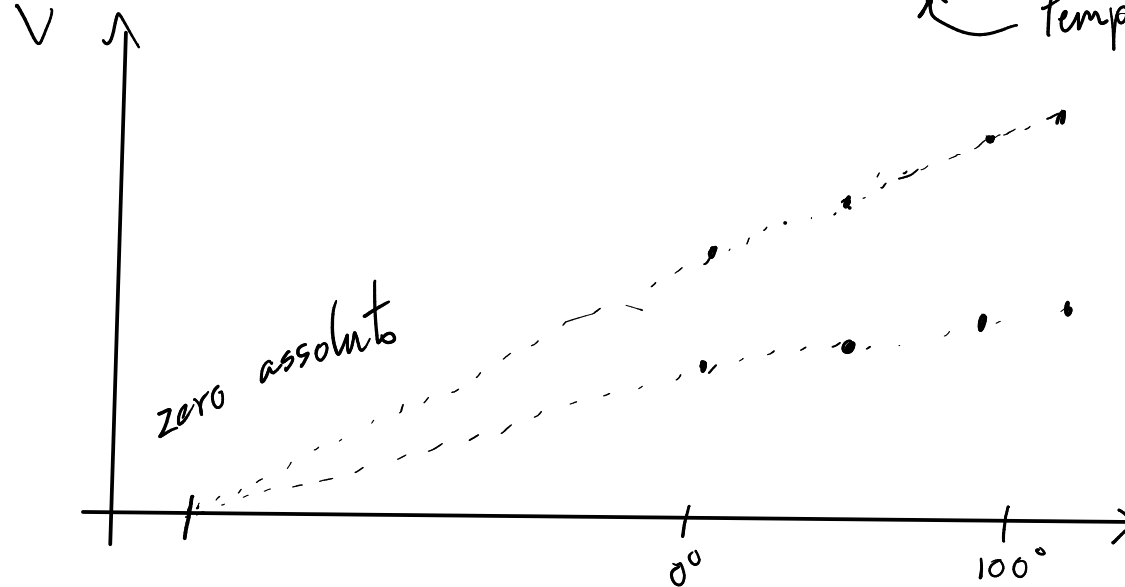
Temperatura

- Prime scale: numero arbitrario di separazioni ("gradi") tra due punti ben definiti.
- Farenheit:
 - 0°F → punto di congelamento dell'acqua satura di sale
 - 100°F → temperatura corporea normale
(poi 321°F → punto di ebollizione dell'acqua (a livello del mare))
- Centigrado (poi divenuto Celsius):
 - 0°C → punto di congelamento dell'acqua
 - 100°C → punto di ebollizione dell'acqua

Temperatura assoluta

- Scala di Kelvin:
 - 0K → zero assoluto
 - 273.16K → punto triplo dell'acqua
 - $T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15$

- Legge di Gay-Lussac



volumi di un gas
 $V \propto T$
temperatura assoluta

Leggi dei gas

- Legge di Boyles:

The volume of an ideal gas at fixed temperature is inversely proportional to its pressure.

$$V \propto \frac{1}{p}$$

- Legge di Charles:

À pression constante, le volume d'un gaz parfait est directement proportionnel à sa température.

$$V \propto T$$

- Legge di Avogadro:

Volumi uguali di gas nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione contengono lo stesso numero di molecole.

$$V \propto N$$

Legge dei gas perfetti

pressione (P_w)

numero di molecole

volume (m^3)

temperatura assoluta (K)

costante di Boltzmann

$$PV = Nk_B T$$

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Storicamente: non si sapevano N e k_B

Si poteva misurare il prodotto Nk_B

"costante dei gas perfetti"

$$Nk_B = \frac{N}{N_A} \cdot k_B N_A$$

$$k_B N_A = R = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}}$$

N_A : numero di Avogadro

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$PV = nRT$$

$$\frac{N}{N_A} = n$$

↑ mole (mol)

Mole

Definizione della costante di Avogadro:

atomi in 12 g di ^{12}C

$$1 \text{ g/mol} = u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

"unified atomic mass unit" = "Dalton"

"unità di massa atomica unificata"

esempio: quale volume occupa 1 mole d'aria

in condizioni normali: $(20^\circ\text{C}, 101.325 \text{ kPa})$?

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{(1 \text{ mol}) \cdot (8.31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}) \cdot (293.15 \text{ K})}{101.325 \text{ kPa}}$$

temperatura assoluta!

$$= 24 \text{ L} \quad (2.4 \times 10^{-2} \text{ m}^3)$$

Gas perfetti e teoria cinetica

Risultato empirico: $PV = \frac{Nk_B T}{nR}$

Risultato teorico: $PV = \frac{2}{3} U$ ← gas monoatomico

(monoatomico) → $U = \frac{3}{2} Nk_B T$ ← energia interna funzione solo della temperatura!

~~$\frac{1}{2} m N \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$~~

$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

Temperatura: una quantità proporzionale all'energia cinetica media dei componenti del gas

Capacità termica e calore specifico

Capacità termica: cambio in energia interna dovuta a un cambio di temperatura

capacità termica $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$ a volume costante

Secondo la teoria cinetica dei gas:

$$C_v = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} n R$$

quantità "estensiva" perché dipende dalla quantità di materia

$$c_v = \frac{C_v}{n} = \frac{3}{2} R$$

calore specifico molare

= capacità termica per mole

$$c = \frac{C_v}{m}$$

calore specifico per unità di massa

Calore specifico di gas monoatomici

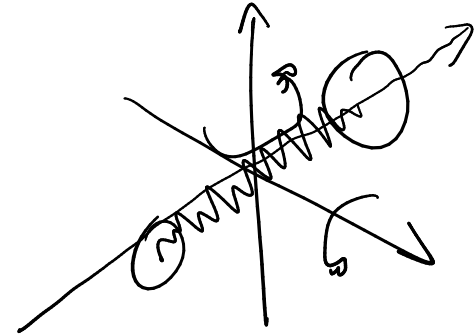
Element	c_V [J/(K kg) ⁻¹]	massa molare g/mol	J/kmol
He	3115	4.003	12.47
Ne	617.9	20.18	12.46
Ar	312.2	39.95	12.46
Xe	94.97	131.29	12.46

||
 $\frac{3}{2} R$

Calore specifico di gas biatomici

Element	c_V [J/(K mol) $^{-1}$]
H ₂	20.5
N ₂	20.8
O ₂	21.1
I ₂	28.6

$\left. \begin{array}{l} 20.5 \\ 20.8 \\ 21.1 \end{array} \right\} \sim \frac{5}{2} R$
 $\left. \begin{array}{l} 28.6 \end{array} \right\} \sim \frac{7}{2} R$



3 traslazioni $\rightarrow \frac{3}{2} R$

2 rotazioni $\rightarrow \frac{2}{2} R$

2 vibrazioni $\rightarrow \frac{2}{2} R$

$\hookrightarrow \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$

Teorema dell'equipartizione dell'energia

All'equilibrio, ciascun grado di libertà contribuisce, in media, di $\frac{1}{2}k_b T$ all'energia per molecola.

Calore specifico

$$c = \frac{C}{m}$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

1. Quanta energia termica è necessaria per aumentare la temperatura di un blocco di rame di 0.5 kg da 0 °C a 100 °C?

$$\Delta U = C \Delta T = (c_{\text{rame}} m) \Delta T = 19 \text{ kJ} \quad \rightarrow \Delta U = C \Delta T$$

2. Quanta energia termica è necessaria per aumentare la temperatura di 0.5 kg di acqua da 0 °C a 100 °C?

$$210 \text{ kJ}$$

3. Qual è la temperatura finale di una miscela di 100 g di acqua a 0 °C e 600 g di acqua a 20 °C?

(1)

$$\Delta U_{\text{totale}} = 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2 = m_1 c_1 (T_f - T_{i1}) + m_2 c_2 (T_f - T_{i2}) \quad c_1 = c_2 = c_{\text{acqua}}$$

4. Qual è la temperatura finale se un pezzo di piombo di 2 kg a 200 °C viene inserito in un contenitore con 10 kg di acqua a 50 °C?

$$0 = m_1 (T_f - T_{i1}) + m_2 (T_f - T_{i2})$$

$$T_f (m_1 + m_2) = m_1 T_{i1} + m_2 T_{i2} \quad \Rightarrow \quad T_f = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 T_{i1} + m_2 T_{i2}) = 17.0^\circ \text{C}$$

c_{rame}	=	386 J kg ⁻¹ K ⁻¹
c_{piombo}	=	128 J kg ⁻¹ K ⁻¹
c_{acqua}	=	4186 J kg ⁻¹ K ⁻¹

$$4. \quad \Delta U_{\text{totale}} = 0 = m_1 c_1 (T_f - T_{1i}) + m_2 c_2 (T_f - T_{2i})$$

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_{1i} + m_2 c_2 T_{2i}}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 51^\circ \text{C}$$