

Esercizio 1

Considera la QED scalare con azione

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu z)(D^\mu z)^* - m^2 z^* z \right], \quad (1)$$

dove $D_\mu z = (\partial_\mu - ieA_\mu)z$, $(D_\mu z)^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)z^*$.

- (i) Calcola l'ampiezza $z\gamma \rightarrow z\gamma$ per l'analogo scalare dello scattering Compton, all'ordine leading in teoria perturbativa nel coupling di gauge e . Denota con p_1 e p_2 i momenti iniziale e finale della particella scalare carica, con k_1 e k_2 i momenti iniziale e finale del fotone, e con h_1 e h_2 le rispettive elicità. Scrivendo l'ampiezza come

$$i\mathcal{M}(p_1, (k_1, h_1) \rightarrow p_2, (k_2, h_2)) = i\mathcal{M}_{\mu\nu}(p_1, k_1; p_2, k_2) \epsilon^\mu(k_1, h_1) \epsilon^{*\nu}(k_2, h_2), \quad (2)$$

verifica l'identità di Ward: $\mathcal{M}_{\mu\nu} k_1^\mu = \mathcal{M}_{\mu\nu} k_2^\nu = 0$.

- (ii) Mostra che il modulo quadro dell'ampiezza, sommato sugli stati di elicità finali e mediato sugli stati di elicità iniziali, è dato da

$$\frac{1}{2} \sum_{h_1, h_2} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[2 + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} - \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot k_1} - \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Per ottenere questa espressione semplificata dovrai usare la conservazione dei momenti e la condizione on-shell per mostrare che tutti gli altri possibili invarianti $p_1 \cdot p_2$, $k_1 \cdot k_2$, $p_2 \cdot k_1$ e $p_2 \cdot k_2$ si possono esprimere in funzione di $p_1 \cdot k_1$ e $p_1 \cdot k_2$.

- (iii) Specifica la formula precedente al sistema del laboratorio, in cui la particella scalare è inizialmente a riposo, ed esprimi il risultato in funzione di ω e ω' , rispettivamente la frequenza iniziale e finale del fotone, e dell'angolo di scattering θ tra il fotone incidente e quello uscente.

Esercizio 2

Considera la teoria di un campo scalare complesso z e di due campi di Dirac ψ_A $A = 1, 2$ con azione

$$S = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z - m^2 \bar{z} z + i\bar{\psi}_A \not{\partial} \psi_A + \frac{y}{2} [z(\bar{\psi}_A \psi_A - \bar{\psi}_A \gamma^5 \psi_A) + \bar{z}(\bar{\psi}_A \psi_A + \bar{\psi}_A \gamma^5 \psi_A)] \right\}, \quad (4)$$

in cui è implicita la somma sull'indice ripetuto A .

- (i) Scrivi l'ampiezza per lo scattering $P_A P_B \rightarrow P_A P_B$ tra due particelle di Dirac entranti e due particelle uscenti, dove $A, B = 1, 2$ sono il label del tipo di particella, all'ordine leading in teoria perturbativa nel coupling y , distinguendo i due casi $A = B = 1$ (o equivalentemente $= 2$) e $A = 1, B = 2$.
- (ii) Nel caso di scattering $P_1 P_2 \rightarrow P_1 P_2$, scrivi il modulo quadro dell'ampiezza, mediata sugli stati di spin iniziali e sommata sugli stati di spin finali.