

TRASFORMAZIONI CANONICHE INFINITESIME (e quantità conservate)

Nuove variabili differiscono da quelle vecchie solo per quantità infinitesime (→ nei conti possiamo sempre trascurare termini di ordine alto)

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i + \delta q_i \\ \tilde{p}_i &= p_i + \delta p_i \end{aligned} \quad \leftarrow \text{variazioni infinitesime} \quad \tilde{x}_i = x_i + \delta x_i \quad (*)$$

- δx_i sono funzioni di $\delta x_i(x, t)$

- Non tutte le $\delta x_i(x, t)$ producono una trasf. canonica. Affinche la trasf. (*) sia canonica, devono essere preservate le PARENTESI DI POISSON, cioè

$$E_{ij} = \{x_i + \delta x_i, x_j + \delta x_j\} = \{x_i, x_j\} + \{x_i, \delta x_j\} + \{\delta x_i, x_j\} + \{\delta x_i, \delta x_j\}$$

trascorriamo perché infinitesimo di ordine superiore

$$\Rightarrow \delta x_i \text{ t.c. } \{x_i, \delta x_j\} - \{x_j, \delta x_i\} = 0,$$

$$\text{cioè } \sum_k E_{ik} \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_k} - \sum_k E_{jk} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_k} = 0 \quad (*)$$

Se chiamiamo $\Omega_{lm} \equiv \frac{\partial \delta x_l}{\partial x_m}$, (*) può essere scritta in forma matriciale come:

$$\Omega E + E \Omega^T = 0$$

Per il Lemma 3 (alla fine di lezione IFT26), qto
 implica che $\exists G(x, t)$ t.c.

$$\delta \bar{x} = \epsilon \bar{\nabla}_x (\epsilon G) = \epsilon \{ \bar{x}, G \} \quad (*)$$

dove abbiamo introdotto il parametro $\epsilon \ll 1$ affinché
 la trasformazione sia infinitesima con G generica.

In coord. (p, q) le condiz. (*) si legge

$$\begin{cases} \delta p_k = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_k}(q, p, t) \\ \delta q_k = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_k}(q, p, t) \end{cases}$$

La funzione $G(\bar{x}, t)$ è detta **GENERATORE** della
 trasf. canonica infinitesima, in quanto determina di
 quanto variano le coord. x_i (cioè p_h, q_h).

La (*) permette di calcolare la variazione infinitesima
 di una generica **VARIABILE DINAMICA** $f(x, t)$:

$$\delta f(\bar{x}, t) = f(\bar{x} + \delta \bar{x}, t) - f(\bar{x}, t)$$

$$\stackrel{|}{=} df(x, t)[\delta x] = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} \delta x_i$$

← qta è data dal differenziale
 df applicato alle variabile δx

$$df(x, t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} dx_i$$

← usiamo (*)

$$= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \epsilon \sum_{j=1}^{2n} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \epsilon \sum_{ij=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \epsilon \{ f, G \}$$

cioè, noto il generatore G , esso determina la variazione di f :

$$\delta f = \epsilon \{f, G\}$$

Teorema di Noether in MECCANICA HAMILTONIANA.

Prendiamo l'Hamiltoniana $H(\bar{x}, t)$. La sua variazione sotto trasformazioni infinitesime indep. del tempo (generate da $G(x, \dot{x})$) è

$$\delta H = \epsilon \{H, G\}$$

$$\delta H = K - H = \tilde{H} - H \quad \text{✗}$$

⇒ Se H è invariante sotto transf. infinitesime generate da G , allora $G(p, q)$ è una **COSTANTE DEL MOTO**.

↳ Versione Hamiltoniana del teorema di Noether

(Vale anche il viceversa: se $G(p, q)$ è cost. del moto, allora H è inv. sotto transf. generate da G .)

Per transf. infinitesime dipendenti del tempo ^(*)

$$\delta H(\bar{x}, t) = K(\bar{x}, t) - H(\bar{x}, t) = \underbrace{\tilde{H} - H}_{\in \{H, G\}} + \underbrace{K_0}_{\epsilon \frac{\partial G}{\partial t}} = \epsilon \left[\{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} \right]$$

Cioè vale ancora che: generatore $G(p, q, t)$ è cost. del moto $\Leftrightarrow H$ è invariante sotto transf. canoniche generate da G .

(*) $H(\bar{x}, t) = H(x + \delta x, t)$
 $\tilde{H}(\bar{x}) = H(\bar{x} - \delta x) = H(x)$
 $\Rightarrow H(\bar{x}, t) - \tilde{H}(\bar{x}) = H(x + \delta x, t) - H(x) = \epsilon \{H, G\}$

$$\epsilon \nabla_{\bar{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (x + \delta x) = \frac{\partial \delta x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \epsilon \nabla G \Rightarrow K_0 = \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}$$

Come passiamo dalle trasf. infinitesime a quelle finite?

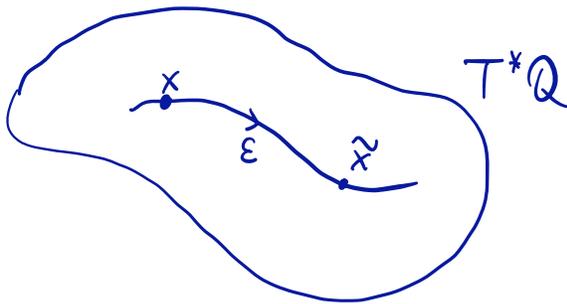
Cioè vogliamo interpretare le trasf. infinitesime come APPROSSIMAZIONE di trasf. continue a 1 parametro generiche, nel limite in cui il parametro sia molto piccolo (e t.c. siano identiche se il parametro si annulla.)

Consideriamo le trasf. canoniche continue a parametro dal punto di vista ATTIVO (cioè mandano un pto $P \in T^*Q$ in un diverso pto $P' \in T^*Q$).

Al variare del parametro ε , esse tracciano una curva in T^*Q data da

$$\tilde{x} = \tilde{w}(x; \varepsilon) \equiv x(\varepsilon; x) \quad (*)$$

\uparrow t.c. $\tilde{w}(x; 0) = x$
in analogia al flusso Hamiltoniano



(per semplicità ignoriamo l'eventuale dip. del tempo delle trasf. canoniche)

Quando $\varepsilon \ll 1$, \tilde{x} è molto vicino a x e lo spostamento $\delta x = \tilde{x} - x$ può essere identificato col vettore tg alla curva in x . Infatti, possiamo espandere (*) in serie di Taylor attorno $\varepsilon = 0$ e tenere solo il primo termine

$$\tilde{x} = \underbrace{x(x; 0)}_x + \underbrace{\frac{dx}{d\varepsilon}(x; 0)}_{\delta x} \varepsilon + \dots$$

$\varepsilon \ll 1$

Cioè otteniamo una transf. ^{CANONICA} INFINITESIMA, come qle descritte sopra, con

$$\delta x = \frac{dx}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

per transf. CANONICHE infinitesime

Ma noi sappiamo che $\delta x = \varepsilon E \nabla_x G$. Qto porta a concludere

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\varepsilon} = E \nabla_x G \quad (*) \quad \leftarrow \text{Abbiamo ricavato qta ep. attorno al pto } x \text{ a } \varepsilon=0. \text{ Possiamo ovviamente ripetere attorno a ogni altro pto della curva e otteniamo la stessa ep.}$$

Integrando questa relazione otteniamo la curva $x(\varepsilon)$!

Formalmente, le $(*)$ sono le EQ. DI HAMILTON ^(*) dove ε fa le veci del tempo e G dell'Hamiltoniana.

$$(*) \quad \dot{x} = E \nabla_x H$$

In quest'ottica, $x(\varepsilon)$ è il FLUSSO HAMILTONIANO associato all'Hamiltoniana G .

Quindi ogni $G(p, q, t)$ può essere interpretata come un'Hamiltoniana il cui flusso Ham. corrisponde alle trasform. canoniche (finite) generate da G .

G è anche detto MOMENT MAP (μ) associata al gruppo di transf. dato.

In particolare, vediamo che dato un sistema, la sua Hamiltoniana genera il moto cioè la traslazione temporale del sistema

→ H è il generatore di TRASLAZIONI TEMPORALI!

Osservazione: abbiamo "chiuso il cerchio" con fine di lezione FT27: avevamo dimostrato che attraverso una funz. $G(x, t)$ potevamo generare una transf. CANONICA (fam. a 1-parametro); qui abbiamo dim. che OGNI transf. can. (fam. a 1-param.) è GENERATA da una funz. $G(x, t)$.

MOMENTO ANGOLARE, ROTAZIONI e PARENTESI DI POISSON

Un esempio classico di gruppo di transf. continuo è il gruppo delle ROTAZIONI $SO(3)$.

Data una particella con coord. cartesiane $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e momenti coniugati $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$, una rotazione agisce sullo spazio delle fasi ruotando simultaneamente \bar{q} e \bar{p} :

$$\bar{p} \mapsto R \bar{p} \quad \bar{q} \mapsto R \bar{q} \quad R \in SO(3)$$

Abbiamo visto che una rotazione infinitesima di angolo $\alpha \ll 1$ attorno all'asse $\hat{\omega}$ ($\|\hat{\omega}\|=1$) è data dalla matrice

$$R(\alpha) = 1 + \Omega(\alpha) \quad \text{con} \quad \Omega_{ij} = -\alpha \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_k$$

Dalla meccanica Lagrangiana, sappiamo che se un sistema è invariante sotto $R(\alpha)$, allora la componente del momento angolare \bar{M} lungo l'asse $\hat{\omega}$ è una COST. DEL MOTO.

Se qto sist. ammette una definizione hamiltoniana, da quanto detto sopra ci aspettiamo che $\bar{M} \cdot \hat{\omega}$ generi le rotazioni infinitesime $R(\alpha)$, cioè ci aspettiamo che

$$\Omega(\alpha) \bar{p} \stackrel{\parallel}{\approx} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \left[\bar{p}, \bar{M} \cdot \hat{\omega} \right] \Leftrightarrow \sum_k \Omega_{ik} p_k = \alpha \left\{ p_i, \sum_k M_k \hat{\omega}_k \right\}$$

e analogamente per \bar{q} .

Verifichiamo qta identita': ricordiamo che $\{P_i, M_h\} = \sum_e \epsilon_{eih} P_e$

$$\begin{aligned} \alpha \sum_h \hat{\omega}_h \{P_i, M_h\} &= \alpha \sum_{h,e} \epsilon_{eih} P_e \hat{\omega}_h = \sum_e \left(-\alpha \sum_h \epsilon_{ieh} \hat{\omega}_h \right) P_e = \\ &= \sum_e \Omega(\alpha)_{ie} P_e \quad // \end{aligned}$$

In particolare, il MOMENTO ANGOLARE GENERA LE ROTAZIONI $SO(3)$.

(Analogamente si può dimostrare che \bar{M} e \bar{A} (vett. di Runge-Lenz) generano il gruppo $SO(4)$; vedi alla fine.)

In generale, le MOMENT MAP $\mu = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} P_\alpha q_\beta$ genera

$$\left. \begin{aligned} \{q_s, \mu\} &= \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} q_\beta \delta_{\alpha s} = \sum_{\beta} M_{s\beta} q_\beta \\ \{P_s, \mu\} &= \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} P_\alpha (-\delta_{\beta s}) = - \sum_{\alpha} M_{s\alpha}^T P_\alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Qnto visto sopra è un caso} \\ \text{particolare in cui } M_{\alpha\beta} \text{ è} \\ \text{ANTISIMMETRICA} \end{array}$$

Verifichiamo ora che se un'Hamiltoniana è invariante per rotazioni, allora $\{M_i, H\} = 0 \quad \forall i=1,2,3$.

In generale, ora verifichiamo che se $f(p, q, x)$ è una funzione invariante per rotazioni, allora $\{M_i, f\} = 0$.

[Un caso particolare è $\{M_i, \bar{M}^2\} = 0$ che abbiamo già verificato.]

Vediamo come agisce M_h su una funtz. INVARIANTE sotto ROTAZIONI:

$$\text{in qto caso } f(\bar{p}, \bar{q}) = g(\bar{p}^2, \bar{q}^2, \bar{p} \cdot \bar{q})$$

unici invarianti sotto rotaz. che posso definire usando i vett. \bar{p} e \bar{q}

Cioè f è composizione di $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

con le tre funzioni:

$$\alpha_1: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{p}^2$$

$$\alpha_2: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{q}^2$$

$$\alpha_3: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\bar{p}, \bar{q}) \mapsto \bar{p} \cdot \bar{q}$$

$$\begin{aligned} \{M_h, f\} &= \sum_m \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m} \right) = \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial q_m} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \alpha_l} \sum_m \left(\frac{\partial M_h}{\partial q_m} \frac{\partial \alpha_l}{\partial p_m} - \frac{\partial M_h}{\partial p_m} \frac{\partial \alpha_l}{\partial q_m} \right) \\ &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \alpha_l} \underbrace{\{M_h, \alpha_l\}}_{\substack{\uparrow \text{dim. one che qto } \bar{e} = 0 \\ \forall h \text{ e } \forall l}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{M_h, \bar{p}^2\} &= \{M_h, \sum_j p_j^2\} = \sum_j 2p_j \{M_h, p_j\} = \\ &= 2 \sum_j p_j \sum_k \epsilon_{hjk} p_k = 0 \end{aligned}$$

$$\{M_n, \bar{q}^2\} = \{M_n, \sum_j \bar{q}_j^2\} = 2 \sum_j \bar{q}_j \sum_k \epsilon_{hjk} \bar{q}_k = 0$$

$$\{M_n, \bar{p} \cdot \bar{q}\} = \{M_n, \sum_j p_j \bar{q}_j\} = \sum_j (p_j \{M_n, \bar{q}_j\} + \bar{q}_j \{M_n, p_j\})$$

$$= \sum_{jk} (p_j \epsilon_{hjk} \bar{q}_k + \bar{q}_j \epsilon_{hjk} p_k) =$$

$$= \sum_{jk} \epsilon_{hjk} (\underbrace{p_j \bar{q}_k}_{\text{antisim.}} + \underbrace{p_k \bar{q}_j}_{\text{symm. in } j \leftrightarrow k}) = 0$$

Extra

$$\bar{A} = \frac{\bar{p} \times \bar{M}}{m} - k \frac{\bar{r}}{r} \quad (o) \quad \bar{M} = \bar{r} \times \bar{p} \quad M_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

$$\{M_i, M_j\} = \sum_e \epsilon_{ije} M_e \quad H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\{M_i, A_j\} = \sum_e \epsilon_{ije} A_e \quad (\bar{A} \text{ è un vett. sotto } so(3))$$

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_e \epsilon_{ije} M_e \quad (..)$$

$$\{H, M_i\} = \{H, A_i\} = 0$$

$\delta_{er} \delta_{ks} - \delta_{es} \delta_{kr}$

Inoltre da def. (o) abbiamo

$$\bar{M} \cdot \bar{A} = 0 \quad e \quad \bar{A}^2 - k^2 = \frac{2H}{m} \bar{M}^2$$

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$

\bar{A} introduce sob un'ulteriore cost. del moto INDIPEND. (oltre a H e M_i)

$$\begin{aligned} \bar{A}^2 = A_i A_i &= \frac{1}{m^2} \sum_{i,j,k,l,r,s} \epsilon_{iell} p_l M_k \epsilon_{irs} p_r M_s + k^2 - \frac{2k}{mr} (\bar{p} \times \bar{M}) \cdot \bar{r} \\ &= \frac{1}{m^2} (\bar{p}^2 \bar{M}^2 - (\bar{p} \cdot \bar{M})^2) + k^2 - \frac{2k}{mr} \bar{M}^2 = \\ &= \frac{2\bar{M}^2}{m} \left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) + k^2 = \frac{2H\bar{M}^2}{m} + k^2 \end{aligned}$$

↳ 5 cost. del moto in sp. delle fasi Gal \Rightarrow traiettorie fissate su curve di livello.

Verifichiamo (..)

$$\{M_s, v_k\} = \epsilon_{ske} v_e$$

$$A_i = \frac{1}{m} \epsilon_{imn} p_n M_n - k \frac{x_i}{r}$$

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\} &= \frac{1}{m^2} \epsilon_{imn} \epsilon_{jrs} \{ p_n M_n, p_r M_s \} - \frac{k}{m} \epsilon_{imn} \{ p_n M_n, \frac{x_j}{r} \} \\ &\quad - \frac{k}{m} \epsilon_{jrs} \{ \frac{x_i}{r}, p_r M_s \} + k^2 \{ \frac{x_i}{r}, \frac{x_j}{r} \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ p_n M_n, p_r M_s \} &= p_n \{ M_n, p_r \} M_s + p_n \{ M_n, M_s \} p_r + M_n \{ p_n, M_s \} p_r \\ &= p_n M_s \epsilon_{nrk} p_k - p_r M_n \epsilon_{smq} p_q + p_n p_r \epsilon_{nsb} M_b \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m^2} \epsilon_{imn} \epsilon_{jrs} \{ p_n M_n, p_r M_s \} = \left\{ p_n p_k M_s \epsilon_{jrs} (\delta_{ri} \delta_{kn} - \delta_{rn} \delta_{ki}) \right\}$$

$$\epsilon_{ijm} M_m = \epsilon_{ijn} \epsilon_{nrs} x_r p_s = x_i p_j - x_j p_i$$

$$\begin{aligned}
 & - p_r p_q M_n (\delta_{mj} \delta_{qr} - \delta_{mr} \delta_{qj}) \epsilon_{imn} \\
 & + p_m p_r M_b (\delta_{ci} \delta_{bm} \delta_{sm} \delta_{bi}) \epsilon_{jrs} \} \cdot \frac{1}{m^2} \\
 = & \left\{ \epsilon_{jis} \bar{p}^2 M_s - p_i p_r M_s \epsilon_{jrs} - \bar{p}^2 M_n \epsilon_{ijn} + p_m p_j M_n \epsilon_{imn} \right. \\
 & \left. + \bar{p} \cdot \bar{M} \epsilon_{jri} p_r - p_s p_r M_i \epsilon_{jrs} \right\} \frac{1}{m^2}
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ - p_i \epsilon_{jrs} p_r M_s + p_j \epsilon_{irs} p_r M_s + \epsilon_{ijn} (\bar{p} \cdot \bar{M} p_n - 2 \bar{p}^2 M_n) \right\} \frac{1}{m^2}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{irs} p_j p_r M_s &= \epsilon_{irs} \epsilon_{smn} p_j p_r x_m p_n = \\
 &= p_j p_r x_m p_n (\delta_{im} \delta_{rn} - \delta_{in} \delta_{rm}) = \\
 &= x_i p_j \bar{p}^2 - p_i p_j \bar{x} \cdot \bar{p}
 \end{aligned}$$

$$= (x_i p_j - x_j p_i) \frac{\bar{p}^2}{m^2} - 2 \epsilon_{ijm} M_n \frac{\bar{p}^2}{m^2} = -\frac{2}{m} \epsilon_{ije} M_e \frac{\bar{p}^2}{2m}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{imn} \cdot \left\{ p_m M_n, \frac{x_j}{r} \right\} &= \left(-\delta_{mj} \frac{M_n}{r} + p_m \epsilon_{njr} \frac{x_r}{r} + M_n x_j \left\{ p_m, \frac{1}{r} \right\} \right) \cdot \epsilon_{imn} = \\
 &= -\epsilon_{ijn} \frac{M_n}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p} \cdot \bar{x} - p_j \frac{x_i}{r} + \epsilon_{imn} x_m M_n x_j \cdot \frac{1}{r^3} \\
 &\approx -\epsilon_{ijn} \frac{M_n}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p} \cdot \bar{x} - p_j \frac{x_i}{r} + \frac{1}{r^3} (x_i x_j \bar{x} \cdot \bar{p} - p_i x_j r^2) \\
 &= -\frac{x_i p_j}{r} + \frac{x_j p_i}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p} \cdot \bar{x} + \frac{1}{r^3} x_i x_j \bar{x} \cdot \bar{p} - \frac{x_i p_j}{r} - \frac{x_j p_i}{r} \\
 &= -\frac{2x_i p_j}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p} \cdot \bar{x} + \frac{1}{r^3} x_i x_j \bar{x} \cdot \bar{p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{jrs} \left\{ \frac{x_i}{r}, p_r M_s \right\} &= -\epsilon_{jmn} \left\{ p_m M_n, \frac{x_i}{r} \right\} = - \uparrow \text{con } i \leftrightarrow j \\
 &= \frac{2}{r} x_j p_i - \frac{\delta_{ij}}{r} \bar{p} \cdot \bar{x} - \frac{1}{r^3} x_i x_j \bar{x} \cdot \bar{p}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{k}{m} (\dots + \dots) = +\frac{2k}{mr} (x_i p_j - x_j p_i) = +\frac{2k}{mr} \epsilon_{ije} M_e$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{imn} x_m M_n x_j &= \epsilon_{imn} \epsilon_{nrs} x_m x_j x_r p_s = \\
 &= x_m x_j x_r p_s (\delta_{ir} \delta_{ms} - \delta_{is} \delta_{mr}) = \\
 &= x_i x_j \bar{x} \cdot \bar{p} - p_i x_j r^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{A_i, A_j\} = -\frac{2}{m} \epsilon_{ij\ell} M_\ell \left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) //$$