Esercizi svolti e assegnati sulle formule di Gauss-Green

Esercizio 1. Calcolare l'area di

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\},$$

dove $a > 0$, $b > 0$ sono fissati.

Svolgimento. Si consideri la curva regolare Γ che percorre in senso in senso antiorario, una volta sola, il bordo della regione E, cioè l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Una parametrizzazione di Γ è

$$\overrightarrow{r}(t) = a\cos(t)\overrightarrow{i}_1 + b\sin(t)\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Applichiamo la formula di Gauss-Green per l'area

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma,$$

dove $\overrightarrow{F} = -y\overrightarrow{i}_1 + x\overrightarrow{i}_2$, e calcoliamo l'integrale curvilineo. Essendo

$$\overrightarrow{r}'(t) = -a\sin(t)\overrightarrow{i}_1 + b\cos(t)\overrightarrow{i}_2$$
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = -b\sin(t)\overrightarrow{i}_1 + a\cos(t)\overrightarrow{i}_2$$

si ha

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t))\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \pi ab$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\oint_\Gamma (x^3 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$$

dove Γ è il perimetro del quadrato $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ percorso in senso antiorario.

Svolgimento. Non conviene calcolare direttamente l'integrale curvilineo: dovrei "spezzarlo" in 4 integrali, essendo Γ dato dall'unione delle quattro curve corrispondenti ai lati del quadrato.
È invece opportuno usare la formula di Gauss-Green "al rovescio": riportare l'integrale curvilineo all'integrale doppio su Q.

$$\begin{aligned}
I = \oint_\Gamma \left[(x^3 - xy^3)\overrightarrow{i}_1 + (y^2 - 2xy)\overrightarrow{i}_2\right] \cdot d\Gamma &= \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - xy^3)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_Q \left(-2y + 3xy^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^2 (-2y + 3xy^2)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[-y^2 + xy^3\right]_0^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 (-4 + 8x)\,\mathrm{d}x = 8
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare l'area del dominio E limitato dai grafici delle funzioni

$$f_1(x) = x(1 - x) \quad x \in [0, 1], \qquad f_2(x) = x(x^2 - 1) \quad x \in [0, 1].$$

Svolgimento. Si noti che $f_2(x) \le 0 \le f_1(x)$ per ogni $x \in [0,1]$, quindi

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1],\ x(x^2-1) \le x(1-x)\right\}. \tag{1}$$

Applichiamo il teorema di Gauss-Green: il bordo Γ di E, percorso in senso antiorario, è dato dall'unione delle due curve $\Gamma_1 = \mathrm{graf}(f_1)$ e $\Gamma_2 = \mathrm{graf}(f_2)$, orientate in senso antiorario. Denotando con $\tilde\Gamma_1$ la curva che percorre $\mathrm{graf}(f_1)$ in senso orario (cioè $\tilde\Gamma_1 = -\Gamma_1$, per la formula di G.G. si ha

$$\mathrm{area}(E) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) - \frac{1}{2}\int_{\tilde\Gamma_1} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Osserviamo che una parametrizzazione di Γ_2 è

$$\gamma_2(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + t(t^2-1)\,\overrightarrow{i}_2 \quad\Rightarrow\quad \gamma_2'(t) = \overrightarrow{i}_1 + (3t^2-1)\,\overrightarrow{i}_2$$

quindi

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \frac{1}{4}.$$

Allo stesso modo si ha

$$\gamma_1(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + t(1-t)\,\overrightarrow{i}_2 \quad\Rightarrow\quad \gamma_2'(t) = \overrightarrow{i}_1 + (1-2t)\,\overrightarrow{i}_2$$

e si calcola

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = -\frac{1}{6}.$$

Allora

$$\mathrm{area}(E) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}.$$

Procedimento alternativo: si sarebbe anche potuto procedere direttamente al calcolo dell'area di E, tenendo conto della (1)

$$\mathrm{area}(E) = \int_0^1 \left(\int_{x(x^2-1)}^{x(1-x)} 1\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{5}{12}.$$

Esercizi assegnati. Usando le formule di Gauss-Green, calcolare

1. l'integrale curvilineo di seconda specie
$$I = \oint_\Gamma x^3 y\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$$
ove Γ è il perimetro del triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ e $C = (2,0)$, **percorso in senso orario.**
Risposta: $I = -\frac{1}{2}$.

2. l'integrale curvilineo di seconda specie
$$I = \oint_\Gamma xy\,\mathrm{d}x - (1 + x^2)\,\mathrm{d}y$$
ove Γ è il perimetro del triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$, **percorso in senso antiorario.**
Risposta: $I = -\frac{1}{2}$.

3. l'integrale curvilineo di seconda specie
$$I = \oint_\Gamma \arctan(y)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y$$
ove Γ è il perimetro del triangolo di vertici $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ e $C = (0,-1)$, **percorso in senso orario.**
Risposta: $I = \frac{\pi}{2} - \ln(2)$.