EQ. DI HAMILTON-JACOBI

Le trasformazioni canoniche (o) coniugano l'Hamiltoniana $H(p,q,t)$ nell'Hamiltoniana

$$K(\tilde{p},\tilde{q},t) = H(u(\tilde{p},\tilde{q},t), v(\tilde{p},\tilde{q},t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p}, v(\tilde{p},\tilde{q},t), t)$$

↳ Qta espressione può essere anche scritta nelle coord. $\tilde{p}, q$:

$$K\left(\tilde{p}, \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}}, t\right) = H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p}, q) \qquad (\star)$$

Un problema importante da risolvere è:

→ dato un sist. Ham. con Hamiltoniana H, qual è la trasf. canonica (se $\exists$) che coniuga H in $\underline{K=0}$?

Trovata qta trasf. can., diciamo $p = u(\tilde{p},\tilde{q},t)$ e $q = v(\tilde{p},\tilde{q},t)$ che coniuga H in $K=0$, allora le eq. di Hamilton in K sono banali:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_k = 0 \\ \dot{\tilde{q}}_h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{p}_k(t) = \tilde{p}_k^0 \\ \tilde{q}_h(t) = \tilde{q}_h^0 \end{cases}$$

Nelle coordinate (p,q) il moto è dunque dato da

$$\begin{cases} p_\ell(t) = u_\ell(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \\ q_\ell(t) = v_\ell(\tilde{p}, \tilde{q}^0, t) \end{cases}$$

← moto determinato completam. dalla trasf. canonica

Le funzioni generatrici ci danno un'equazione che ci permette di determinare tale trasf. canonica.

Infatti, guardando la relazione ($\star$) si vede che se $F_2(\tilde{p}, q, t)$ soddisfa

$$H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}(\tilde{p}, q, t), q, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\tilde{p}, q) = 0 \qquad (\ddagger)$$

allora F_2 genera una trasf. can. che coniuga H in $K=0$.

L'eq. ($\ddagger$) è chiamata EQ. DI HAMILTON-JACOBI ed è un'eq. alle derivate parziali per F_2.

Risolvere l'eq. di Hamilton-Jacobi è un modo alternativo di risolvere le equazioni del moto.

ES. : OSCILLATORE ARMONICO

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \rightarrow \text{eq. H-J: } \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

H non dip. dal tempo ⇝ provo una soluzione del tipo $F_2(\tilde{p}, q, t) = W(\tilde{p}, q, t) - \alpha(\tilde{p})\, t$

Inseriamo in H-J eq e otteniamo un'eq. per W

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \alpha(\tilde{p})$$

scelgo $\tilde{p}$ t.c. $\alpha(\tilde{p}) = \omega\tilde{p}$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\omega\tilde{p} - m^2\omega^2 q^2$$

$$W(\tilde{p}, q) = \sqrt{2m\omega\tilde{p}} \int_{q_0}^{q} \sqrt{1 - \frac{m\omega q'^2}{2\tilde{p}}}\, dq' = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2m\omega\tilde{p} - m^2\omega^2 q'^2}\, dq'$$

Non occorre risolvere l'integrale : a noi interessano le derivate di $F_2 = W(\tilde{p}, q) - \omega\tilde{p}\, t$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{2m\omega\tilde{p}}\sqrt{1 - \frac{m\omega q^2}{2\tilde{p}}}$$

$$\tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = \int_{q_0}^{q} \frac{\cancel{2}m\omega\, dq'}{\cancel{2}\sqrt{2m\omega\tilde{p} - m^2\omega^2 q'^2}} - \omega t =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2\tilde{p}} q'^2}} - \omega t =$$

$x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}}\, q'$

$$= \int_{\sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}}\,q_0}^{\sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}}\,q} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \omega t = \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\tilde{p}}}\,q\right) - \tilde{q}_c - \omega t$$

- Invertiamo $\tilde{q} = \dots$ per ricavare q

$$q = \sqrt{\frac{2\tilde{p}}{m\omega}}\,\mathrm{sen}\left(\tilde{q} + \tilde{q}_c + \omega t\right)$$

- Sostituiamo in $p = \dots$ e otteniamo

$$p = \sqrt{2m\omega\tilde{p}}\,\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\tilde{q}+\tilde{q}_c+\omega t)} =$$

$$= \sqrt{2m\omega\tilde{p}}\,\cos(\tilde{q}+\tilde{q}_c+\omega t)$$

L'Ham. coniugata è ora $K=0$ e quindi

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) &= \tilde{p}_0 \\ \tilde{q}(t) &= \tilde{q}_0 \end{aligned} \rightsquigarrow$$ sostituendo nella trasf. can. otteniamo le $p(t)$, $q(t)$

$$\Rightarrow \quad p(t) = \sqrt{2m\omega\tilde{p}_0}\,\cos(\omega t + \tilde{q}_0')$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{m\omega}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \tilde{q}_0')$$

$\tilde{q}_0' = q_0 + q_c$

Che sono le note soluzioni per l'oscillatore armonico.

SISTEMI INTEGRABILI

Un sistema Ham. a n gradi di libertà è detto INTEGRABILE se esiste una trasf. canonica

$$\begin{aligned} p_h &= u_h(J, \varphi) \\ q_h &= v_h(J, \varphi) \end{aligned}$$ con u e v periodiche nelle coord. φ_h

con $(J_1, \dots, J_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ ← TORO n-dimensionale, dette variabili AZIONE–ANGOLO, t.c. l'Hamiltoniana coniugata ad $H(p,q)$ è una funz. K che dipende solo dalle J → $K = K(J)$.

Allora nelle coord. AZIONE–ANGOLO le eq. di Ham. sono (φ sono coord. cicliche)

$$\begin{cases} \dot{J}_h = 0 \\ \dot{\varphi}_h = \dfrac{\partial K(J)}{\partial J_h} \equiv \omega_h(J) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} J_h(t) &= J_h^0 \\ \varphi_h(t) &= \omega_h(J^0)\, t + \varphi_0 \end{aligned}$$

In qta situazione, $J_1, \dots, J_n$ sono n COST. DEL MOTO che sono in INVOLUZIONE, cioè $\{J_h, J_k\} = 0 \quad \forall h, k$.

$\mathbb{T}^n$ è un TORO n-dim. $(\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-volte}})$:

le variabili φ_h sono degli ANGOLI di PERIODO 2π

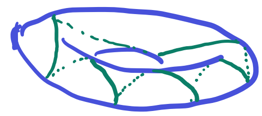
$\Rightarrow$ $\varphi_h(t)$ sono funzioni PERIODICHE di periodo $T_h = \dfrac{2\pi}{\omega_h(J)}$

(T_h è il tempo in cui $\varphi_h(T_h) = \varphi_h(0) + 2\pi$.)

→ Per un SIST. INTEGRABILE, le traiettorie in T^*Q sono LIMITATE e QUASI-PERIODICHE. Le traiettorie giacciono su insiemi di livello $J_h = J_h^0$ e sono dei cerchi nelle dir. φ_h.

Tali insiemi di livello sono copie di T^n. Le traiettorie sono curve in tale T^n.

Es. $n=2$ $\quad T^2$



Il moto è periodico se il rapporto tra le freq. ω_h è RAZIONALE.

Siccome le traiettorie sono indipendenti dal sistema di coord. che uso per descriverle, il moto in (p,q) è pure un moto limitato e quasi-periodico (è ovviam. difficile vederlo in tali coord.).

TEOREMA. Preso sist. Ham. a n gradi di lib.

- Ammettiamo che ESISTANO n COST. DEL MOTO $f_i(p,q)$ $\quad i=1,\dots,n$ INDIPENDENTI e IN INVOLUZIONE $\{f_i, f_j\}=0 \quad \forall i,j=1,\dots,n$
- Inoltre ammettiamo che per un $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, l'insieme di livello $\mathcal{M}_{\bar{a}} = \{ f_i(p,q)=a_i \}$ sia COMPATTO e CONNESSO

$\Rightarrow$ Il sistema è INTEGRABILE

(Arnold)

$M_{\bar{a}}$ è parametrizzato dagli angoli φ_h. Variando φ_h ottengo una curva γ_h in $M_{\bar{a}}$.

Def. Le VARIABILI AZIONE sono def. da $\quad J_h = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_h} \sum_{l=1}^{n} p_l \, dq_l$

J_h dipendono solo dalle cost. del moto f_i e sono anche loro indip. e in involuzione.

→ si dimostra che le variabili CANONICAM. CONIUGATE alle J_h sono proprio ANGOLI DI PERIODO 2π.

$$\Rightarrow \quad T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

Esempi di sistemi INTEGRABILI

- Corpo in un campo di FORZE CENTRALI con $V = V(r)$ in $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$,
  Esistono 3 cost. del moto in involuzione:
  $$\{H, M_z\} = 0 \qquad \{H, \bar{M}^2\} = 0 \qquad \{M_z, \bar{M}^2\} = 0.$$

- Trottola di Lagrange $(n=3)$.
  Esistono 3 cost. del moto in involuzione:
  $$\{H, p_\varphi\} = 0 \qquad \{H, p_\psi\} = 0 \qquad \underbrace{\{p_\varphi, p_\psi\} = 0}$$
  p_φ e p_ψ sono mom. coniugati

- Tutti i sistemi a 1-dim. $(n=1)$ con H indip. da t.
  Esiste 1 cost. del moto H.

Osservazione. I sistemi integrabili sopra elencati sono in genere risolvibili con altri approcci rispetto quello Hamiltoniano. Uno potrebbe domandarsi perché sviluppare un tale formalismo allora.

Inoltre, i sistemi in natura sono tipicamente non-integrabili. Però, spesso sono APPROSSIMABILI con sist. integrabili e il formalismo Hamiltoniano è molto utile per trattare una tale approssimazione (TEORIA DELLE PERTURBAZIONI).

ES: PUNTO MATERIALE in $\mathbb{R}^3$ soggetto a POTENZIALE KEPLERIANO

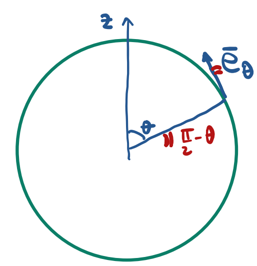
In coordinate POLARI su $\mathbb{R}^3$, l'Hamiltoniana di tale sistema è:

$$H(p_r,p_\theta,p_\varphi,r,\theta,\varphi) = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)}_{T} \underbrace{-\frac{k}{r}}_{+\,V}$$

Eq. di Ham:

$$\dot p_r = \frac{1}{m}\frac{p_\varphi^2}{r^3\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{k}{r^2} \qquad \dot p_\theta = \frac{1}{m}\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}^3\theta} \qquad \dot p_\varphi = 0$$

$$\dot r = \frac{p_r}{m} \qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\operatorname{sen}^2\theta}$$



Le cost. del moto sono H e

$$|\bar M|^2 = |\bar r\times\bar p|^2 = \left|r\bar e_r\times\left(p_r\bar e_r+\frac{p_\theta}{r}\bar e_\theta+\frac{p_\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\bar e_\varphi\right)\right|^2 =$$

$$= \left|-r\frac{p_\theta}{r}\bar e_\varphi + r\frac{p_\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\bar e_\theta\right|^2 = p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$M_z = \left(-p_\theta\bar e_\varphi+\frac{p_\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\bar e_\theta\right)\cdot\bar e_z = \frac{p_\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = p_\varphi$$

- Ci sono tre cost. del moto in involuz.

  $|\bar M|^2,\ M_z,\ H \longrightarrow (\ell,\ \ell_z,\ E)$

- Le variabili azione saranno funz. di tali cost. del moto.

- Consideriamo l'ins. di livello $|\bar M|^2=\ell,\ M_z=\ell_z,\ H=E$ (•)

Per en. negative lo sp. permesso $M_{\bar{a}}$ su cui si muovono le traiettorie è compatto.

- Def. γ_φ la curva ottenuta variando φ e tenendo fisse θ, r (p_φ, p_θ, p_r sono det. in funz. di φ dalle condiz. (•)).

- Analogam. def. γ_θ, γ_r

- Calcoliamo le variab. azione (in funz. di l, l_z, E):

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\varphi} p_\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} l_z 2\pi = l_z$$

cost. in ins. livello

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\theta} p_\theta \, d\theta = \dots = l - l_z$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r \, dr = \dots = -l + k\sqrt{\frac{m}{-2E}}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

VEDI FASANO-MARMI per conti espliciti

- Per trovare $K(J)$ notiamo che essa sarà una funzione dei J_r, J_θ, J_φ t.c. una volta che ad essi sostituiamo le loro espressioni in funz. di l, l_z, E, otteniamo $K(J) = E$.

$$\Rightarrow K(J) = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

• Da qui possiamo calcolarci le freq.

$$\omega_r = \frac{\partial K}{\partial J_r} \qquad \omega_\theta = \frac{\partial K}{\partial J_\theta} \qquad \omega_\varphi = \frac{\partial K}{\partial J_\varphi}$$

Q.te derivate sono tutte uguali $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \omega_r = \omega_\theta = \omega_\varphi \equiv \omega = \frac{mk^2}{(J_r+J_\theta+J_\varphi)^3} = mk^2\left(\frac{-2E}{mk^2}\right)^{3/2}$$

$\Rightarrow$ Il periodo in cui la traiettoria in T^*Q si chiude (che è anche il periodo dell'orbita) è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{mk^2}\left(\frac{mk^2}{-2E}\right)^{3/2} = \frac{2\pi\,(mk^2)^{1/2}}{(-2E)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T^2}{\underset{\nwarrow(*)}{a^3}} = \frac{4\pi^2 mk^2}{(-2E)^3}\,\frac{(-2E)^3}{k^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$\Rightarrow$ Otteniamo il periodo delle orbite dei pianeti (e la terza legge di Keplero) senza risolvere esplicitam. il problema di determinare l'orbita (che corrisponde a invertire la trasf. canonica).

(*):

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \left(\frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{mk}}\right)\left(\frac{\cancel{m}k^{\cancel{2}}}{-2E\cancel{\ell^2}}\right) = \frac{k}{-2E}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}$$