4.4 Classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2$

Utilizzando i precedenti risultati, vedremo quali sono gli invarianti di una conica e come è possibile determinarne una forma canonica senza calcolare esplicitamente la rototraslazione.

Teorema 4.4.1. *Sia C una conica avente, come matrici completa e della forma quadratica, rispettivamente, B e A, nel riferimento $(O; x, y)$. Siano B' e A' le matrici associate a C (la cui equazione è ottenuta mediante cambio speciale di coordinate) nel riferimento $(O'; X, Y)$. Allora:*

i) i polinomi caratteristici di A e di A', $p_A(T)$ e $p_{A'}(T)$, coincidono;

ii) $\det(A) = \det(A')$ *e* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$

iii) $\det(B) = \det(B')$ *e* $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(B')$.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.3.1, le matrici A e A' sono simili e le matrici B e B' sono congruenti (tramite una matrice Q di determinante 1). La tesi segue dalle Proposizioni 4.2.2 e 4.2.3. □

Alla luce dei Teoremi 4.3.2 e 4.4.1, si può caratterizzare una conica nel piano euclideo mediante i determinanti delle matrici associate. Infatti, data una conica in forma generale, esiste un'isometria diretta del piano tale che la conica trasformata sia in forma canonica. Per quest'ultima è immediato calcolare i determinanti e i ranghi delle matrici associate; ma tali invarianti, come appena visto, si mantengono per isometria.

La seguente tabella contiene le possibili forme canoniche e i rispettivi invarianti numerici. Per convenzione, le forme paraboliche $(P.i)$ e $(P.ii)$ restano distinte e il coefficiente di x^2 (risp. y^2) è esattamente l'autovalore non nullo di A. Inoltre le coniche di tipo (E) ed (I) possono essere scritte anche entrambe nell'unica forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

dove α e β sono gli autovalori di A.

Entrambe queste convenzioni sono utili per esprimere in modo omogeneo le rispettive matrici complete delle coniche e per il "metodo rapido" di riduzione a forma canonica illustrato nella prossima Osservazione 4.4.1.

tipo	equazione	B	$\det(B)$	$\det(A)$
$P.i$	$\alpha x^2 = 2\gamma y,\ \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$	$-\alpha\gamma^2$	0
$P.ii$	$\beta y^2 = 2\gamma x,\ \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\beta\gamma^2$	0
$P.iii$	$x^2 = \gamma\ (y^2 = \gamma)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$	0	0
$E.i$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_1$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
$E.ii$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_2$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
$E.iii$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_3$	0	$\alpha\beta > 0$
$I.i$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_4$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
$I.ii$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_5$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
$I.iii$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_6$	0	$\alpha\beta < 0$

Tabella delle forme canoniche in $\mathbb{E}^2$

dove si sono posti:

$*_1$ $\alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = a^2 b^2$

$*_2$ $\alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = -a^2 b^2$

$*_3$ $\alpha = b^2, \quad \beta = a^2$

$*_4$ $\alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = a^2 b^2$

$*_5$ $\alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = -a^2 b^2$

$*_6$ $\alpha = b^2, \quad \beta = -a^2$

Teorema 4.4.2. *Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un qualunque sistema di riferimento cartesiano. Allora:*

a) *C è degenere se e solo se $|B| = 0$; in particolare, è doppiamente degenere se e solo se $\text{rk}(B) = 1$;*

b) *se C è non degenere allora:*

- *C è una parabola se e solo se $|A| = 0$;*
- *C è un'ellisse se e solo se $|A| > 0$;*
- *C è un'iperbole se e solo se $|A| < 0$.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 4.3.2, dal Teorema 4.4.1 e dalla precedente tabella. □

La discussione precedente fornisce un metodo per ottenere la forma canonica di una conica non degenere *senza* utilizzare le matrici di rototraslazione.

Osservazione 4.4.1 (*Metodo rapido di riduzione a forma canonica).*
Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un certo sistema di riferimento cartesiano.
i) Si determinano gli autovalori α e β della matrice A (cioè le radici, sicuramente reali, del polinomio caratteristico $p_A(T)$).
ii) Caso $\det(A) = 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, si può supporre $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$.
- Se $\det(B) = -\alpha\gamma^2 \neq 0$, la conica è una parabola e si ha
$$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{|B|}{\alpha}}$$
e quindi una forma canonica è $\alpha X^2 = 2\gamma Y$.
- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenere e una sua forma canonica è $X^2 = \gamma$. Se $\gamma = 0$ allora C è unione di due rette reali e coincidenti; se $\gamma > 0$, C è unione di due rette reali e distinte, se $\gamma < 0$, C è unione di due rette complesse e coniugate. Si noti che, in questo caso, non si riesce a determinare γ partendo solo dalle matrici A e B.

iii) Caso $\det(A) \neq 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, allora $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Inoltre $\det(B) = -\alpha\beta\gamma$.
- Se $\det(B) \neq 0$, la conica è un'ellisse o un'iperbole e si ha
$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$$
e quindi una forma canonica della conica è $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.
- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenere e di forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 0$.

Esempio 4.4.1. Determiniamo una forma canonica della conica vista nell'Esempio 4.3.2

$$C:\ x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$$

con il metodo ora descritto.
Abbiamo già visto che le matrici associate a C sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$|B| = -16 \quad \text{e} \quad |A| = 0$$

la conica è non degenere ed è una parabola, infatti gli autovalori di A calcolati in precedenza sono: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$. Scegliendo dunque la forma $(P.i)$:

$$\alpha X^2 = 2\,\gamma\,Y$$

poiché $\alpha = 2$ e $\det(B) = -\alpha\gamma^2$, si ha $\gamma^2 = 8$; scegliendo ad esempio $\gamma = -2\sqrt{2}$, si ottiene

$$2X^2 = -4\sqrt{2}Y$$

cioè

$$X^2 = -2\sqrt{2}\,Y.$$

L'altra scelta $\gamma = 2\sqrt{2}$ significa riferirsi ad un altro sistema di riferimento $(O'; \overline{X}, \overline{Y})$ nel quale la parabola ha equazione:

$$\overline{X}^2 = 2\sqrt{2}\,\overline{Y}.$$

Esempio 4.4.2. Determiniamo una forma canonica della conica

$$C:\ 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 5 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

di determinanti, rispettivamente:

$$|B| = -11, \quad |A| = 2.$$

Quindi C è non degenere ed è una ellisse (reale). Determiniamone una forma canonica del tipo:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma,$$

dove α e β sono gli autovalori di A, $|A| = \alpha\beta$ e $|B| = -\alpha\beta\gamma$. Poiché

$$p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 4T + 2$$

gli autovalori di A sono

$$\alpha = 2 - \sqrt{2}, \quad \beta = 2 + \sqrt{2}.$$

Inoltre $\gamma = -|B|/|A| = 11/2$. Da cui segue che una forma canonica di C è

$$(2 - \sqrt{2})X^2 + (2 + \sqrt{2})Y^2 = \frac{11}{2}.$$

Si noti che anche in questo caso non è unica la forma canonica: infatti, scambiando gli autovalori α e β, la forma canonica risulta

$$(2 + \sqrt{2})\overline{X}^2 + (2 - \sqrt{2})\overline{Y}^2 = \frac{11}{2}.$$

Concludiamo col risultato più importante di questa sezione. Se richiediamo che una conica sia un insieme non vuoto di punti, oltre che soddisfare un'equazione del tipo (4.4), dobbiamo eliminare il caso (E.ii) dalla tabella precedente.

Teorema 4.4.3 (*Classificazione delle coniche nel piano euclideo reale)*. *Ogni conica C in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ (costituita da almeno un punto reale) è definita, a meno di isometrie dirette, da un'equazione di una delle seguenti famiglie*

(P) famiglie paraboliche:

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$
$$x^2 = q^2, \quad q \neq 0$$

(E) famiglie ellittiche:

$$x^2 + p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$
$$x^2 + p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(I) famiglie iperboliche:

$$x^2 - p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$
$$x^2 - p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(D) conica doppiamente degenere:

$$x^2 = 0$$

descritte dai parametri $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Inoltre le famiglie precedenti sono distinte, a meno di isometrie.

Dimostrazione. Per i Teoremi 4.3.1 e 4.3.2, è sufficiente mostrare che ogni conica in forma canonica può essere trasformata in una conica delle precedenti famiglie attraverso un'isometria diretta.
Le forme canoniche delle coniche sono elencate nella Tabella precedente, ma bisogna tenere conto della limitazione dell'ipotesi: la conica deve contenere almeno un punto reale. Questo esclude alcune coniche degeneri paraboliche e precisamente quelle di tipo $(P.iii)$ di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e le ellissi immaginarie $(E.ii)$: entrambe, come osservato, non hanno punti reali.
Prendiamo dunque in esame le restanti forme canoniche della Tabella precedente.

$(P.i)$ Per tali coniche è ovvio: basta dividere l'equazione per α e si ottiene la prima famiglia parabolica.
$(P.ii)$ L'equazione è $\beta y^2 = 2\gamma x$ associata alla matrice B come nella Tabella. Si ponga

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

quindi è una conica di tipo $(P.i)$ e dunque riconducibile alla prima famiglia parabolica.
$(P.iii)$ Una conica di equazione $x^2 = \gamma$ ha punti reali se e solo se $\gamma \geq 0$. Quindi, nel caso $\gamma > 0$, possiamo scrivere la sua equazione come $x^2 = q^2$, ottenendo la seconda famiglia parabolica. Se invece $\gamma = 0$, otteniamo la conica doppiamente degenere denotata con (D) nell'enunciato.
$(E.i)$ Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia ellittica.
$(E.iii)$ Per tali coniche si procede come in $(E.i)$, ottenendo la seconda famiglia ellittica.
$(I.i)$ Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia iperbolica.
$(I.ii)$ Basta applicare l'isometria associata alla matrice Q definita sopra e si ottiene una conica di tipo $(I.i)$ e quindi riconducibile alla prima famiglia iperbolica.
$(I.iii)$ Per tali coniche si procede come in $(I.i)$, ottenendo la seconda famiglia iperbolica.

Per provare l'ultima affermazione, è sufficiente confrontare i determinanti delle matrici associate a ogni famiglia dell'enunciato e applicare "in negativo" il Teorema 4.4.1.

famiglia	$\det(B)$	$\det(A)$
$(P)-1$	<0	0
$(P)-2$	0	0
$(E)-1$	<0	>0
$(E)-2$	0	>0
$(I)-1$	>0	<0
$(I)-2$	0	<0
(D)	0	0

Chiaramente le righe di questa tabella sono tutte distinte, eccetto la seconda famiglia parabolica e la conica (unica) doppiamente degenere. In tal caso, però, il rango di B è diverso: vale 2 nel primo caso e 1 nel secondo. Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 4.4.2. Come notato nella dimostrazione del precedente *Teorema di classificazione*, sono escluse le coniche di tipo $(P.iii)$ di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e quelle di tipo $(E.ii)$ di equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$: infatti entrambe non hanno punti reali. La prima è unione di due rette complesse e coniugate $x = \pm\sqrt{\gamma}$ e la seconda è un'ellisse immaginaria.

Nell'analogo risultato di *Classificazione delle coniche nel piano euclideo complesso* (che qui omettiamo), entrambe vengono recuperate nelle famiglie elencate nel *Teorema di classificazione* visto sopra.

4.5 Studio di una conica in forma generale

Lo scopo di questo paragrafo è determinare i punti e le rette notevoli di una conica in forma generale. Strumento fondamentale sarà il Teorema 4.3.2 che qui ricordiamo:

Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ con coordinate (x, y). Allora esiste un riferimento cartesiano $(O', \mathcal{B}')$ con coordinate (X, Y), ottenuto dal precedente mediante rototraslazione (isometria diretta), in cui C ha un'equazione in forma canonica.

Utilizzeremo la consueta notazione, introdotta nel Teorema 4.3.1, dove Q e P denotano, rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio (speciale) di riferimento

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

con $P \in SO(2)$ e vale la (4.14):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Chiaramente non è restrittivo supporre che $\mathcal{B}$ sia la base canonica, quindi P è la matrice le cui colonne sono i vettori della base (ortonormale) $\mathcal{B}'$.

Osservazione 4.5.1. I punti e le rette notevoli di una conica in forma canonica sono stati definiti e studiati nel Paragrafo 4.1: gli assi di una conica a centro sono gli assi coordinati X e Y, il suo centro è l'origine O', i suoi vertici sono le intersezioni della conica con gli assi. Nel caso della parabola, il suo asse è l'asse Y e il vertice l'origine O'.

E' chiaro che basta applicare a tali punti e rette il cambio di coordinate inverso a quello descritto sopra per ottenerli nel riferimento $(O; x, y)$. Cercheremo invece strade alternative più brevi.

Iniziamo stabilendo alcune proprietà generali

Lemma 4.5.1. *Gli assi di simmetria e i centri di simmetria di un sottoinsieme di $\mathbb{E}^2$ si mantengono per isometrie. Più precisamente, se f è un'isometria del piano, X un sottoinsieme di $\mathbb{E}^2$ e r è una retta asse di simmetria per X, allora $f(r)$ è asse di simmetria per $f(X)$. Inoltre, se M è centro di simmetria per X, allora $f(M)$ è centro di simmetria per $f(X)$.*

Dimostrazione. Per esercizio.

Proposizione 4.5.2. *Sia C una conica nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$.*

i) Se C è una parabola allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è (l'unico) centro di simmetria.

Dimostrazione. Segue dal Lemma precedente e dal fatto che l'enunciato vale per coniche in forma canonica grazie alla Proposizione 4.1.1. □

Vediamo ora come risolvere il problema iniziale: determinare gli assi e il centro di una conica a centro e l'asse e il vertice di una parabola, quando queste siano date in forma generale (senza trasformarla in forma canonica).

Proposizione 4.5.3. *Sia $(O; x, y)$ un riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^2$ e sia C una conica a centro. Allora C ha per centro il punto O se e solo se nella sua equazione non compaiono i termini di primo grado.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che C sia non degenere e abbia equazione generale

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0. \tag{4.22}$$

Per la Proposizione 4.5.2, è sufficiente provare che O è suo centro di simmetria se e solo se $a_{13} = 0 = a_{23}$.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di C e $Q_0 = (-x_0, -y_0)$ il suo simmetrico rispetto a O. Se $a_{13} = 0 = a_{23}$ è chiaro che anche le coordinate di Q_0 soddisfano l'equazione (4.22) e dunque $Q_0 \in C$. Pertanto O è centro di simmetria della conica.

Viceversa, supponiamo che O sia il centro di simmetria della conica e si consideri un altro punto $P_1 = (x_1, y_1) \in C$ in modo che O, P_0, P_1 non siano allineati (tale punto esiste perché C è non degenere). Dunque anche il punto $Q_1 = (-x_1, -y_1)$, simmetrico di P_1 rispetto a O, appartiene alla conica. In conclusione:

$$P_0, Q_0 \in C \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\, x_0^2 + 2\, a_{12}\, x_0 y_0 + a_{22}\, y_0^2 + 2\, a_{13}\, x_0 + 2\, a_{23}\, y_0 + a_{33} = 0 \\ a_{11}\, x_0^2 + 2\, a_{12}\, x_0 y_0 + a_{22}\, y_0^2 - 2\, a_{13}\, x_0 - 2\, a_{23}\, y_0 + a_{33} = 0 \end{cases}$$

e dal sistema precedente (ad esempio, sottraendo un'equazione dall'altra) segue $a_{13}\, x_0 + a_{23}\, y_0 = 0$. In modo del tutto analogo, da $P_1, Q_1 \in C$ segue $a_{13}\, x_1 + a_{23}\, y_1 = 0$. Abbiamo quindi provato che, se O è centro di simmetria della conica, allora (a_{13}, a_{23}) è soluzione del sistema lineare nelle incognite u e v:

$$\begin{cases} u\, x_0 + v\, y_0 = 0 \\ u\, x_1 + v\, y_1 = 0 \end{cases}.$$

Ma il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo perché, per costruzione O, P_0, P_1 non sono allineati. Pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla e quindi $(a_{13}, a_{23}) = (0, 0)$ come volevamo. □

Esercizio C1. Provare il risultato precedente nel caso di conica degenere.

Esempio 4.5.1. Sia data la conica $\Gamma: \ 3x^2 + 4xy - y^2 + 3 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo.
Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -21$, Γ è non degenere ed è un'iperbole. Il suo centro è nell'origine per la Proposizione 4.5.3, in quanto la sua equazione non contiene i monomi di primo grado.

Teorema 4.5.4. *Sia C una conica a centro di equazione*

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0.$$

Il suo centro è il punto le cui coordinate (u, v) sono l'unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}u + a_{12}v + a_{13} = 0 \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23} = 0 \end{cases}$$

avente come matrice completa quella costituita dalle prime due righe della matrice B associata alla conica.

Dimostrazione. La conica C ha per centro $M = (u, v)$ nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ se e solo se, operando la traslazione

$$\begin{cases} X = x - u \\ Y = y - v \end{cases}$$

nel sistema di coordinate X e Y ha per centro l'origine. Si operi dunque la sostituzione $x = X + u, y = Y + v$ nell'equazione di C, che diventa:

$$\begin{aligned} a_{11}\,(X+u)^2 + 2\,a_{12}\,(X+u)(Y+v) + a_{22}\,(Y+v)^2 + \\ + 2\,a_{13}\,(X+u) + 2\,a_{23}\,(Y+v) + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

ovvero, con un calcolo immediato e denotando con γ il termine costante, si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned} a_{11}\,X^2 + 2\,a_{12}\,XY + a_{22}\,Y^2 + \\ + 2(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})X + 2(a_{12}u + a_{22}v + a_{23})Y + \gamma = 0 \end{aligned}$$

Dalla Proposizione 4.5.3, tale conica ha per centro l'origine se e solo se i coefficienti dei monomi X e Y sono entrambi nulli. □

Esempio 4.5.2. Sia data la conica $\Gamma: \ 3x^2 + 4xy - y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo.
Consideriamo le matrici associate

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -13$, Γ è non degenere ed è un'iperbole. Il suo centro si ottiene dal sistema i cui coefficienti sono le prime due righe di B:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

La soluzione è $(x, y) = (-1/7, -9/7)$, che sono le coordinate del centro di Γ.

Per determinare gli assi di una conica a centro (e l'asse di una parabola) occorre un fatto preliminare di algebra lineare. Valgono le notazioni ricordate all'inizio del paragrafo, in particolare si considerino due basi ortonormali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$ e il cambio di riferimento di $\mathbb{E}^2$ da $(O, \mathcal{B})$ a $(O', \mathcal{B}')$ associato alla (4.21).

Lemma 4.5.5. *Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta di giacitura r_0. Se $r_0 = \langle(\alpha, \beta)\rangle$ in $(O'; X, Y)$, allora la giacitura di r in $(O; x, y)$ è $r_0 = \langle(\gamma, \delta)\rangle$, dove*

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Si osservi anzitutto che si può riportare il problema in $\mathbb{R}^2$ in quanto la giacitura r_0 è un suo sottospazio vettoriale. Il generico vettore di r_0 sulla base $\mathcal{B}'$ è quindi $(X, Y) = \lambda(\alpha, \beta)$. Poiché la matrice di cambio base è P e vale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

il generico vettore di r_0 sulla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

come volevamo. □

Tenendo conto dell'Osservazione 4.5.1 si prova il seguente risultato.

Proposizione 4.5.6. *Sia C una conica non degenere e siano B ed A le matrici ad essa associate in un qualunque sistema di riferimento $(O; x, y)$.*

i) Se C è una conica a centro (non circonferenza), allora i suoi assi sono le due rette passanti per il centro e aventi come giaciture i due autospazi della matrice A;

ii) se C è una parabola, allora il suo asse è la retta per il vertice e di giacitura l'autospazio della matrice A associato al suo autovalore nullo.

Dimostrazione. Con le notazioni iniziali, indichiamo con $(O'; X, Y)$ il riferimento in cui C ha forma canonica e matrici B' e A', dove $B' = {}^tQBQ$, $A' = P^{-1}AP$ e le matrici P e Q sono come in (4.20) e (4.21).
i) Gli assi di C sono ovviamente gli assi coordinati X e Y. Vogliamo determinare la loro giacitura in $(O; x, y)$.
A tal fine, utilizziamo il Lemma 4.5.5, osservando che in $(O'; X, Y)$ le loro giaciture sono ovviamente $\langle(1, 0)\rangle$ e $\langle(0, 1)\rangle$, quindi in $(O; x, y)$ sono, rispettivamente:

$$P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\end{pmatrix}.$$

Tenendo conto della costruzione della matrice P, ricordiamo che le sue colonne sono una base ortonormale di autovettori e quindi ognuna di esse genera un autospazio di A.
ii) Del tutto analogo, tenendo con che l'asse di C è l'asse Y (come nella forma canonica $x^2 = qy$ nel *Teorema di classificazione delle coniche nel piano euclideo reale*) e quindi l'autovalore nullo è il secondo nella matrice A'. □

Esempio 4.5.3. Sia Γ l'iperbole dell'Esempio 4.5.2. Abbiamo determinato il suo centro $M = (-1/7, -9/7)$. Per la Proposizione 4.5.6, gli assi di Γ sono le rette per M parallele agli autospazi di A. Per determinare tali autospazi, cosideriamo la matrice della forma quadratica di Γ:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}.$$

Si verifica che $p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 2T - 7$ e dunque $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$ sono gli autovalori di A. Ne segue che gli autospazi, dati dalle formule

$$V_{\lambda_i}: \ (a_{11} - \lambda_i)x + a_{12}y = 0 \ , \quad i = 1, 2$$

risultano essere

$$V_{\lambda_1}: \ (1 + \sqrt{2})x + y = 0 \ , \qquad V_{\lambda_2}: \ (1 - \sqrt{2})x + y = 0.$$

Pertanto gli assi hanno una equazione del tipo

$$a_1: \quad (1 + \sqrt{2})x + y + h_1 = 0; \qquad a_2: \quad (1 - \sqrt{2})x + y + h_2 = 0.$$

Infine, imponendo il passaggio per M, si ottiene: $h_1 = (10 + \sqrt{2})/7$ e $h_2 = (10 - \sqrt{2})/7$.

Si noti che il Teorema 4.5.4 assieme alla Proposizione 4.5.6-(*i*), permettono di determinare assi e centro di una conica a centro; mentre dalla Proposizione 4.5.6-(*ii*) si può determinare l'asse di una parabola solo se è noto il vertice. Per calcolare quest'ultimo dovremo usare la nozione di retta tangente che verrà introdotta nel Paragrafo 4.6.

4.6 Coniche nel piano affine

In questo paragrafo, studieremo una generica conica C del piano affine reale $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. La sua equazione è sempre data da (4.4), ma qui la ripetiamo (con sua propria numerazione) in quanto l'ambiente geometrico non è più il piano euclideo. Sia dunque

$$C: \quad a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0 \tag{4.23}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Affrontiamo lo studio delle possibili intersezioni di una retta e una conica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (rispettivamente, in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$).

Consideriamo una retta del piano affine che, per comodità di calcolo, assumiamo non parallela all'asse y

$$r: \quad y = mx + q.$$

I punti comuni a C ed r sono quelli le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}x(mx+q) + a_{22}(mx+q)^2 + \\ \qquad + 2a_{13}x + 2a_{23}(mx+q) + a_{33} = 0 \ . \\ y = mx + q \end{cases} \tag{4.24}$$

La prima equazione di tale sistema è (in generale) di secondo grado nella sola variabile x, quindi ha al più due radici reali x_0, x_1 (distinte o no) che, sostituite nella seconda, forniscono le coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) (ove $y_i = mx_i + q$) dei punti di $C \cap r$.
Si osservi che, nel caso in cui la prima equazione abbia due soluzioni complesse (e coniugate in quanto i coefficienti sono reali) $x_0, \overline{x_0}$, si può procedere egualmente con la sostituzione e si determinano due punti di coordinate complesse (x_0, y_0) e $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$, ove $y_0 = mx_0 + q$.
Chiaramente, se r è parallela all'asse y, cioè di equazione $x = k$, si opera in modo del tutto analogo.

E' possibile che la prima equazione di (4.24) non sia di secondo grado: vedremo negli esempi seguenti che può essere di primo grado: in tal caso r e C si incontrano in un solo punto di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (e anche di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$).

Tuttavia la prima equazione di (4.24) può risultare anche di grado zero. Se è un'identità, e quindi $0 = 0$, significa che tutti i punti della retta soddisfano il sistema e dunque $r \subset C$; tale situazione si verifica solo se C è degenere ed r è una delle due rette che costituiscono C.

Infine si può verificare il caso in cui l'equazione (di grado zero) non ha soluzioni: questo accade se $r \cap C = \emptyset$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (e anche in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$).

Abbiamo dunque provato la seguente:

Proposizione 4.6.1. *Una conica non degenere e una retta (reali) hanno al più due punti di intersezione in* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Esempio 4.6.1. Sia Γ la conica di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e sia r la retta $x = 1/2$. Allora $\Gamma \cap r$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3/4 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{3}/2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

cioè $\Gamma \cap r = \{(1/2, \sqrt{3}/2), (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$.

Esempio 4.6.2. Siano date la conica e la retta

$$\Gamma : \; xy - 1 = 0 \quad \text{e} \quad r : \; x = 3$$

Chiaramente $\Gamma \cap r = \{P = (3, 1/3)\}$ sia in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Esempio 4.6.3. Siano

$$\Gamma : \; x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad r : \; x = 3.$$

Allora $\Gamma \cap r$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2\,i\,\sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Quindi $\Gamma \cap r = \{(3, 2\,i\,\sqrt{2}), (3, -2\,i\,\sqrt{2})\}$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, mentre $\Gamma \cap r = \emptyset$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Osservazione 4.6.1. Dalla dimostrazione della Proposizione 4.6.1 segue comunque che non si può presentare il caso che una conica Γ e una retta r reali abbiano due punti in comune in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, di cui solo uno a coordinate reali; infatti se $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap r$, allora anche $(\overline{x_0}, \overline{y_0}) \in \Gamma \cap r$.

✍ Fare un esempio di una retta r e una conica C tali che $r \cap C = \emptyset$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e anche in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Dalla Proposizione 4.6.1 e dall'Osservazione 4.6.1 segue immediatamente la descrizione della posizione reciproca di una retta e una conica che si incontrano in 2 punti.

Proposizione 4.6.2. *Siano C ed r una conica e una retta reali aventi due punti in comune in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$; allora tali punti sono di uno e uno solo dei seguenti tipi:*

i) complessi e coniugati;

ii) reali e distinti;

iii) reali e coincidenti. □

Definizione 4.6.1. Siano C ed r una conica e una retta reali come nella Proposizione precedente. In corrispondenza dei 3 casi, introduciamo le seguenti nozioni:

i) diciamo che r è *esterna* a C;

ii) diciamo che r è *secante* C nei due punti reali e distinti;

iii) diciamo che la retta r è *tangente* C nel punto di intersezione.

Esempio 4.6.4. La conica e la retta dell'Esempio 4.6.1 sono secanti nei punti $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/2)$; quelle dell'Esempio 4.6.3 sono esterne. Infine, la conica $\Gamma: \ x^2 + y^2 = 1$ e la retta $r: \ x = 1$ sono tangenti nel punto $(1, 0)$. Infatti dal calcolo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

si vede che l'equazione di secondo grado in una variabile nel sistema (4.24) non si abbassa di grado, come nell'Esempio 4.6.2, ma ha una radice di molteplicità 2. Diciamo in tal caso che si ottiene il punto $(1, 0)$ "contato due volte" o che tale punto è intersezione *doppia* (o di *molteplicità* 2) della conica e della retta.

Definizione 4.6.2. Per denotare la *molteplicità di intersezione* di una conica non degenere C e di una retta r in un punto P_0 scriveremo

$$m_{P_0}(C, r) = 0 \iff \quad C \text{ e } r \text{ non si incontrano in } P_0$$

$$m_{P_0}(C, r) = 1 \iff \quad r \text{ è secante } C \text{ in } P_0$$

$$m_{P_0}(C, r) = 2 \iff \quad r \text{ è tangente a } C \text{ in } P_0.$$

Proposizione 4.6.3. *Sia C una conica non degenere passante per l'origine, dunque di equazione*

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y = 0.$$

Allora esiste ed è unica la retta tangente a C in $(0,0)$ ed è data da:

$$T_O(C): \quad a_{13}\,x + a_{23}\,y = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo una generica retta per l'origine di giacitura $\langle(m,n)\rangle$, con $(m,n) \neq (0,0)$, cioè di equazioni cartesiana e parametrica date rispettivamente da

$$r_{m,n}: \quad nx - my = 0 \qquad , \qquad \begin{cases} x = m\lambda \\ y = n\lambda \end{cases}.$$

Vogliamo provare che esiste un'unica (a meno di coefficiente di proporzionalità) coppia (m,n) tale che $r_{m,n}$ sia tangente a C in $(0,0)$.
Chiaramente l'intersezione $r_{m,n} \cap C$ è data dall'equazione

$$(a_{11}\,m^2 + 2\,a_{12}\,mn + a_{22}\,n^2)\lambda^2 + 2\,(a_{13}\,m + a_{23}\,n)\lambda = 0$$

e $\lambda = 0$ è soluzione doppia se e solo se $a_{13}\,m + a_{23}\,n = 0$.
Si osservi che non può essere $a_{13} = 0 = a_{23}$ altrimenti C avrebbe equazione $a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 = 0$ e quindi sarebbe degenere, in quanto il determinante della matrice associata risulta nullo.
Dunque il polinomio $a_{13}\,x + a_{23}\,y$ non è identicamente nullo. Pertanto $r_{m,n}$ è tangente a C in $(0,0)$ se e solo se

$$a_{13}\,m + a_{23}\,n = 0 \iff (m,n) = \rho(a_{23}, -a_{13}).$$

Tali coppie (m,n), proporzionali tra loro, determinano dunque un'unica retta che è la retta tangente richiesta, avente equazione cartesiana data da $a_{13}x + a_{23}y = 0$. □

Osservazione 4.6.2. Dalla proposizione precedente si ha immediatamente che, se C è una conica non degenere passante per l'origine, allora la retta $T_O(C)$ è definita dalla parte di primo grado dell'equazione di C.

Esempio 4.6.5. Sia C la conica di equazione

$$x^2 + 2xy - 7y^2 - x + 3y = 0.$$

Per la Proposizione 4.6.3, la retta tangente a C nell'origine è

$$T_O(C): \quad x - 3y = 0.$$

Il precedente risultato viene ora utilizzato per provare il caso generale.

Teorema 4.6.4. *Se C è una conica non degenere di equazione (4.23) e $P_0 = (x_0, y_0) \in C$, allora esiste ed è unica la retta tangente a C in P_0 ed ha equazione*

$$T_{P_0}(C):\ (a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0$$

<u>Dimostrazione</u>. Ci riconduciamo al caso della Proposizione 4.6.3 operando la traslazione che manda P_0 nell'origine:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica ha equazione:

$$\begin{aligned} a_{11}\,(X + x_0)^2 + 2\,a_{12}\,(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}\,(Y + y_0)^2 +& \\ + 2\,a_{13}\,(X + x_0) + 2\,a_{23}\,(Y + y_0) + a_{33} = 0.& \end{aligned}$$

e dunque, per la Proposizione 4.6.3, la retta tangente a C in $O' = P_0$ è

$$(a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13})X + (a_{12}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23})Y = 0.$$

La tesi segue tenendo conto della traslazione precedente. □

Osservazione 4.6.3. Ricordando le regole di derivazione, la retta tangente $T_{P_0}(C)$ a una conica non degenere C di equazione $f(x, y) = 0$ in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è data da:

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} (y - y_0) = 0. \qquad (4.25)$$

Definizione 4.6.3. Si dice *vettore tangente* a C in P_0, e si denota con $t_{P_0}(C)$, il vettore (parallelo alla retta $T_{P_0}(C)$)

$$t_{P_0}(C) := \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}.$$

Chiaramente $t_P(C)$ è definito a meno di un fattore di proporzionalità.

Esempio 4.6.6. Si calcoli l'equazione della retta $T_{P_0}(C)$ tangente alla conica $C : x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 1 = 0$ nel suo punto $P_0 = (2, 1)$.
Per l'Osservazione 4.6.3 la retta richiesta è individuata da

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{P_0} = (2x - 2y - 1)_{P_0} = 1, \qquad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{P_0} = (-2x + 6y)_{P_0} = 2$$

dunque $T_{P_0}(C):\ (x - 2) + 2(y - 1) = 0$, cioè $x + 2y - 4 = 0$.

Esempio 4.6.7. Determinare le rette tangenti alla conica $C: y - x^2 = 0$ passanti per punto $P_0 = (2,3)$ (si noti che $P_0 \notin C$).
La generica retta per P_0 ha equazione $r: \ y - 3 = m(x-2)$; basta imporre che r intersechi C in due punti reali e coincidenti:

$$r \cap C: \quad \begin{cases} y = m(x-2)+3 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x-2)+3 \\ x^2 - mx + 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

Dobbiamo richiedere che il discriminante della seconda equazione sia nullo:

$$\Delta = m^2 - 8m + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2, \ m_2 = 6.$$

Pertando le due rette tangenti richieste sono:

$$2x - y - 1 = 0\ , \quad 6x - y - 9 = 0.$$

Esempio 4.6.8. Si determinino le rette tangenti alla conica $C \subset \mathbb{E}^2$ (si osservi che in questo esercizio l'ambiente è il piano euclideo) di equazione $y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ e ortogonali alla retta $r: x - 3y + 5 = 0$; si determinino inoltre i corrispondenti punti di tangenza.
La generica retta ortogonale ad r ha un'equazione del tipo:

$$s_k: \quad 3x + y + k = 0\ , \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo per quali k la retta s_k è tangente a C:

$$s_k \cap C: \begin{cases} 3x + y + k = 0 \\ y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-y-k}{3} \\ y^2 + 4y + 2k - 1 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione ha due radici coincidenti se e solo se

$$\Delta/4 = 4 - (2k-1) = 0 \iff k = 5/2.$$

Dunque esiste un'unica retta tangente a C e ortogonale ad r ed è

$$s: \ 6x + 2y + 5 = 0.$$

Inoltre il suo punto di tangenza $P := s \cap C$ si calcola sostituendo $k = 5/2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-y-5/2}{3} \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2y-5}{6} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P = (-1/6, -2).$$

Resta da studiare il caso della tangenza a una conica degenere: lo vedremo nel prossimo paragrafo.