

Appunti di Analisi 2

Equazioni Differenziali

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Fisica, a.a. 2023/2024

versione preliminare

1 Prime definizioni

Le equazioni differenziali sono uno degli strumenti principali utilizzati per modellizzare i fenomeni della natura, nel senso più ampio del termine. Le troviamo in tutte le scienze, principalmente nella fisica, ma anche in ambito economico, biologico, medico, sociale. Esse sono catalogabili in due tipi diversi: le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni differenziali alle derivate parziali. In queste note, tratteremo solo delle prime.

Consideriamo un'espressione del tipo

$$u' = f(t, u), \quad (1)$$

che chiameremo “equazione differenziale in forma canonica”, e iniziamo a spiegarne il significato. Qui f è una funzione continua definita su un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, a valori in \mathbb{R}^N .

Definizione 1 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione di (1) in I ” se:

- I è un intervallo non degenere di \mathbb{R} ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è derivabile su I ,
- $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$.

Ricordiamo che

$$u'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \in \mathbb{R}^N$$

è il “vettore derivata” di u in t .¹ Spesso, pensando ai modelli della meccanica, $u(t)$ si può interpretare come “vettore posizione al tempo t ” e $u'(t)$ come “vettore velocità al tempo t ”. Si chiama “orbita” della soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'insieme immagine $u(I) = \{u(t) : t \in I\}$, mentre chiameremo “traiettoria” di u il suo grafico $\{(t, u(t)) : t \in I\}$. Lo spazio \mathbb{R}^N si chiama “spazio delle fasi”.

¹Siano $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Se $a \in I$, allora $u'(a)$ sarà un limite destro. Similmente, se $b \in I$, allora $u'(b)$ sarà un limite sinistro.

Nelle applicazioni ci si trova spesso ad affrontare la ricerca di una soluzione dell'equazione differenziale che soddisfi una "condizione iniziale" del tipo

$$u(t_0) = u_0.$$

Avendo in mente i modelli della meccanica, si dice che la "posizione" di u "al tempo iniziale" t_0 è u_0 . Ci si trova così a dover risolvere il "problema di Cauchy"

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua, e $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Definizione 2 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è "soluzione del problema (PC)" se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- u è soluzione di (1) in I ,
- $u(t_0) = u_0$.

Risulta molto utile la seguente formulazione equivalente del problema.

Teorema 3 Una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è soluzione del problema (PC) se e solo se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è continua su I ,
- $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ per ogni $t \in I$.²

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione. Se u è una soluzione del problema (PC), allora

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

il che dimostra una delle due implicazioni.

Viceversa, se u è una funzione continua per cui si abbia

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

si ha che $u(t_0) = u_0$, e la funzione $s \mapsto f(s, u(s))$ è continua. Quindi u è derivabile, e si ha

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds = f(t, u(t)),$$

per ogni $t \in I$. ■

²L'integrale di una funzione a valori vettoriali $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t)),$$

è definito da

$$\int_a^b g(t) dt = \left(\int_a^b g_1(t) dt, \dots, \int_a^b g_N(t) dt \right).$$

Esso è quindi un vettore di \mathbb{R}^N . Se $a < b$, risulterà utile la seguente disuguaglianza:

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Spesso le equazioni differenziali coinvolgono anche derivate di ordine più elevato. Un tipico esempio è dato dall'equazione di Newton $F = ma$. In questo caso, se $x(t)$ denota la posizione di un oggetto di massa m al tempo t , l'equazione si può solitamente scrivere come

$$x'' = \frac{1}{m}F(t, x, x').$$

Qui F dipende dal tempo t , dalla posizione x e dalla velocità x' . Definendo $y = x'$, $u = (x, y)$, e $f(t, u) = (y, \frac{1}{m}F(t, x, y))$, l'equazione si può scrivere come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m}F(t, x, y), \end{cases}$$

ossia $u' = f(t, u)$, quindi nella forma canonica (1). Il problema di Cauchy in questo caso avrà una condizione iniziale del tipo $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = y_0$.

In generale, un'equazione differenziale “di ordine n ” si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Essa può essere ricondotta alla forma canonica (1), con $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, ponendo

$$u_1 = x, u_2 = x', \dots, u_n = x^{(n-1)}, \quad f(t, u) = (u_2, u_3, \dots, g(t, u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Il corrispondente problema di Cauchy avrà come condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Ci sono anche equazioni differenziali in forma implicita:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

Sotto opportune ipotesi si possono ricondurre alla forma $x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$.

2 Alcune semplici equazioni

Iniziamo a considerare il caso scalare $N = 1$: in generale, purtroppo, anche in questo caso “semplice”, trovare una soluzione esplicita di un'equazione differenziale può essere un'impresa senza speranza.

Consideriamo dapprima l'equazione differenziale

$$u' = a(t)u + b(t),$$

dove $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue. Si parla in questo caso di “equazione differenziale lineare”. Studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Notiamo che, se u è una soluzione, allora

$$\frac{d}{dt} \left[u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \right] = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} (u'(t) - a(t)u(t)) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t);$$

integrando su $[t_0, t]$,

$$u(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} - u_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma,$$

da cui ricaviamo la formula risolutiva

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right).$$

Ad esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u + t^2 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_0^t 3 ds} \int_0^t e^{-\int_0^{\sigma} 3 ds} \sigma^2 d\sigma \\ &= e^{3t} \int_0^t e^{-3\sigma} \sigma^2 d\sigma \\ &= \frac{2}{27}(e^{3t} - 1) - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Analizziamo ora le “equazioni differenziali a variabili separabili”:

$$u' = e(t)g(u).$$

Qui $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ha come dominio un intervallo J , ed $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre $g(u) \neq 0$ per ogni u nell'intervallo J , per cui l'equazione si può scrivere l'equazione nella forma equivalente

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = e(t), \quad u(t) \in J. \quad (2)$$

Come sopra, studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e(t)g(u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Supponendo che $u([t_0, t])$ sia contenuto in J si può integrare (2) su $[t_0, t]$ e, con un cambio di variabile, si ottiene

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^t e(s) ds.$$

Se denotiamo con $\mathcal{P} : J \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di $1/g$, otteniamo

$$\mathcal{P}(u(t)) = \mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds,$$

e siccome \mathcal{P} è strettamente monotona (avendo derivata sempre diversa da zero), possiamo scrivere

$$u(t) = \mathcal{P}^{-1} \left(\mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds \right).$$

Ad esempio, vediamo come trattare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin t (u^2 + 1) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u^2 + 1} = \int_0^t \sin s \, ds = 1 - \cos t,$$

da cui

$$\arctan u(t) = \arctan u_0 + 1 - \cos t,$$

ossia

$$u(t) = \tan \left(\arctan u_0 + 1 - \cos t \right).$$

Si noti che l'espressione è ben definita se t varia in un intorno di 0, ma potrebbe non esserlo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Come secondo esempio, cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1 + 2t}{\cos u} \\ u(0) = \pi. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{\pi}^{u(t)} \cos u \, du = \int_0^t (1 + 2s) \, ds = t + t^2,$$

da cui

$$\sin u(t) = t + t^2.$$

Ora bisogna fare attenzione che ci troviamo con $u(t)$ sull'intervallo contenente π dove la funzione \sin è strettamente monotona, cioè in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Definendo $w(t) = u(t) - \pi$, avremo che $w(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\sin w(t) = \sin(u(t) - \pi) = -\sin u(t) = -(t + t^2),$$

per cui $w(t) = \arcsin(-(t + t^2)) = -\arcsin(t + t^2)$, e quindi

$$u(t) = \pi + w(t) = \pi - \arcsin(t + t^2).$$

3 Il problema di Cauchy: esistenza e unicità

3.1 Esistenza locale

Nel 1890, Giuseppe Peano ha dimostrato il seguente risultato di “esistenza locale”.

Teorema 4 (di Peano) *Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$, esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$.*

Si noti che la soluzione potrebbe non essere unica. Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(u) = 2\sqrt{|u|} = \begin{cases} 2\sqrt{u} & \text{se } u \geq 0 \\ 2\sqrt{-u} & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

(Qui la funzione f non dipende esplicitamente da t . Si ha pertanto a che fare con un'“equazione differenziale autonoma”). Si vede subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione costante $u(t) = 0$, ma anche la soluzione

$$u(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Inoltre, ce ne sono infinite altre, date da

$$u(t) = \begin{cases} (t - c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \geq 0$ è una costante arbitraria, oppure

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq c \\ -(t - c)^2 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \leq 0$, o anche

$$u(t) = \begin{cases} (t - c_2)^2 & \text{se } t \geq c_2 \\ 0 & \text{se } c_1 < t < c_2 \\ -(t - c_1)^2 & \text{se } t < c_1, \end{cases}$$

con $c_1 \leq 0 \leq c_2$.

Per avere anche l'unicità della soluzione, è quindi necessario introdurre delle ipotesi aggiuntive sulla funzione f .

3.2 Esistenza e unicità locale

Definizione 5 Diremo che la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un intorno U e una costante $\mathcal{L}_U > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq \mathcal{L}_U \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in U .

Proposizione 6 Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Allora f è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se e solo se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L_K \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in K .

Dimostrazione. ³ Per quanto riguarda la prima implicazione, è sufficiente scegliere un intorno U compatto, e si ha la tesi. Vediamo quindi la seconda. Per assurdo,

³NON FATTA A LEZIONE

supponiamo che esista un compatto $K \subseteq \Omega$ ed esistano due successioni $(t_n, v_n)_n$ e $(t_n, w_n)_n$ in K (con la stessa t_n) tali che

$$\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\| > n\|v_n - w_n\|. \quad (3)$$

Sia $M_K := \max\{\|f(t, u)\| : u \in K\}$. Per la compattezza di K la successione $(t_n, v_n)_n$ possiede una sottosuccessione $(t_{n_k}, v_{n_k})_k$ convergente a un elemento $(\bar{t}, \bar{u}) \in K$. Essendo

$$\|v_{n_k} - w_{n_k}\| \leq \frac{1}{n_k} \|f(t_{n_k}, v_{n_k}) - f(t_{n_k}, w_{n_k})\| \leq \frac{1}{n_k} 2M_K \rightarrow 0,$$

abbiamo che anche $\lim_k w_{n_k} = \bar{u}$. Sia allora U un intorno di (\bar{t}, \bar{u}) e $\mathcal{L}_U > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq \mathcal{L}_U \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in U . Per k sufficientemente grande, (t_{n_k}, v_{n_k}) e (t_{n_k}, w_{n_k}) apparterranno a U e $n_k \geq \mathcal{L}_U$, per cui

$$\begin{aligned} \|f(t_{n_k}, v_{n_k}) - f(t_{n_k}, w_{n_k})\| &\leq \mathcal{L}_U \|v_{n_k} - w_{n_k}\| \\ &\leq n_k \|v_{n_k} - w_{n_k}\|, \end{aligned}$$

in contraddizione con (3). ■

Proposizione 7 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Se esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial u} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ed è continua, allora f è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile.*

Dimostrazione.⁴ Consideriamo un punto $(t_0, u_0) \in \Omega$ e fissiamo un $\rho > 0$ tale che $K := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \bar{B}(u_0, \rho) \subseteq \Omega$. Sia $L_K := \max\{\|\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)\| : u \in K\}$. Allora, per ogni (t, v) e (t, w) in K ,

$$\begin{aligned} \|f(t, v) - f(t, w)\| &\leq \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(t, w + s(v - w)) \right\| : s \in [0, 1] \right\} \cdot \|v - w\| \\ &\leq L_K \|v - w\|. \end{aligned}$$

il che dimostra l'asserto. ■

Teorema 8 (di Cauchy–Lipschitz) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una ed una sola soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Inoltre, la successione di funzioni $(u_n)_n$, definita da*

$$u_0(t) = u_0, \quad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds,$$

è tale che $\lim_n u_n = u$, uniformemente su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$.

Osserviamo che se $\lim_n u_n = u$, uniformemente su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$, allora u è una funzione continua su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e passando al limite nella definizione di u_{n+1} otteniamo che u soddisfa

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

quindi è soluzione del problema (PC). La dimostrazione del teorema si basa sul seguente risultato di punto fisso.

⁴NON FATTA A LEZIONE

3.3 Il teorema delle contrazioni

Definizione 9 Dato uno spazio metrico E , diremo che una funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è una “contrazione” se, per un certo $\alpha < 1$, si ha

$$d(\varphi(v), \varphi(w)) \leq \alpha d(v, w),$$

per ogni $v, w \in E$.

Teorema 10 (di punto fisso di Banach-Caccioppoli/ delle contrazioni)

Se E è uno spazio metrico completo e $\varphi : E \rightarrow E$ è una contrazione, allora esiste un unico $x \in E$ tale che $\varphi(x) = x$. Inoltre, scegliendo $x_0 \in E$ arbitrariamente, la successione $(x_n)_n$ definita da

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

è tale che $\lim_n x_n = x$.

Siccome $\varphi(x) = x$, si dice che x è un “punto fisso” di φ .

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(x_n)_n$ definita come nell’enunciato, con $x_0 \in E$ arbitrario. Dimostriamo che è una successione di Cauchy. Osserviamo che, se m e n sono due numeri naturali, con $m < n$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Dimostriamo per induzione che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente proposizione:

$$(P_k) \quad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1).$$

Infatti, se $k = 0$ si ha chiaramente l’uguaglianza, per cui (P_0) è vera. Supponiamo ora vera (P_k) , per un certo $k \in \mathbb{N}$; allora

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(\varphi(x_k), \varphi(x_{k+1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1),$$

per cui è vera anche (P_{k+1}) .

Usando (P_k) , abbiamo quindi

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{n-1-m} \alpha^k \\ &= \alpha^m d(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \\ &\leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $\alpha \in [0, 1]$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$n > m \geq \bar{n} \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

per cui $(x_n)_n$ è di Cauchy. Siccome E è completo, esiste il limite di $(x_n)_n$. Sia

$$\lim_n x_n = x \in E.$$

Allora, essendo φ continua,

$$\varphi(x) = \varphi(\lim_n x_n) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x,$$

il che dimostra che x è un punto fisso di φ .

Resta da dimostrare che il punto fisso è unico. Supponiamo che x' sia anch'esso un punto fisso di φ . Allora

$$d(x, x') = d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \alpha d(x, x'),$$

e siccome $\alpha < 1$, deve essere $x = x'$. ■

Dimostrazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz. Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che⁵

$$K := [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \bar{B}(u_0, r_2) \subseteq \Omega,$$

sia $L_K > 0$ la relativa costante di Lipschitz, e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

Scegliamo $r_0 > 0$ tale che

$$r_0 < \min\left\{r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L_K}\right\}.$$

Poniamo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e

$$E = \{u \in C(I_0, \mathbb{R}^N) : \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

Sia T la funzione che associa ad ogni $v \in E$ la funzione $T(v) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$[T(v)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \quad \text{per ogni } t \in I_0.$$

Dimostriamo che $T(v) \in E$. Infatti, $T(v)$ è una funzione continua, e si ha

$$\|[T(v)](t) - u_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s))\| ds \right| \leq M|t - t_0| < r_2.$$

Quindi, abbiamo definito una funzione $T : E \rightarrow E$. Notiamo inoltre che, prese v, w in E , si ha

$$\begin{aligned} \|T(v) - T(w)\|_\infty &= \max\{\|[T(v)](t) - [T(w)](t)\| : t \in I_0\} \\ &= \max\left\{\left\| \int_{t_0}^t (f(s, v(s)) - f(s, w(s))) ds \right\| : t \in I_0\right\} \\ &\leq \max\left\{\left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\| ds \right| : t \in I_0\right\} \\ &\leq \max\left\{\left| \int_{t_0}^t L_K \|v(s) - w(s)\| ds \right| : t \in I_0\right\} \\ &\leq L_K r_0 \|v - w\|_\infty. \end{aligned}$$

⁵Qui $\bar{B}(u_0, \rho)$ denota la palla chiusa centrata in u_0 di raggio $\rho > 0$.

Ponendo $\alpha = L_K r_0$, si ha quindi che $\alpha < 1$ e

$$\|T(v) - T(w)\|_\infty \leq \alpha \|v - w\|_\infty.$$

La funzione $T : E \rightarrow E$ è pertanto una contrazione, e per il Teorema delle contrazioni esiste un unico $u \in E$ tale che $T(u) = u$. Allora

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in I_0,$$

per cui $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione del nostro problema. Il Teorema delle contrazioni assicura inoltre che la successione $(u_n)_n$ definita iterativamente da $u_{n+1} = T(u_n)$ converge a u , nella topologia di E , cioè uniformemente. ■

3.4 L'unicità in grande

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

Poiché $u(0) = -1$, per continuità la soluzione u è negativa in un intorno di $t_0 = 0$; finché $u(t)$ non si annulla si può applicare il metodo di separazione delle variabili, che ci porta alla formula

$$u(t) = -(t - 1)^2.$$

Tale funzione si annulla per $t = 1$, dunque il metodo fornisce una soluzione definita nell'intervallo $] - \infty, 1]$. In tale intervallo la soluzione è unica. Nel punto $(1, 0)$ il campo vettoriale cessa di essere localmente lipschitziano; da tale punto si biforcano infinite soluzioni per $t > 1$. In particolare, le funzioni

$$u_c(y) = \begin{cases} -(t - 1)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < c \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

al variare di $c > 1$, sono tutte soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Questo esempio mostra che può esserci unicità locale ma non globale. La perdita dell'unicità nell'esempio precedente è dovuta al fatto che, pur essendoci unicità locale in un intorno di t_0 , la traiettoria della soluzione passa per un punto in cui si perdono la locale lipschitzianità del campo vettoriale e l'unicità delle soluzioni ivi passanti.

Vale il seguente risultato.

Teorema 11 *Sia f continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e siano $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzioni del problema (PC), con I_1, I_2 intervalli aperti. Allora $u_1 = u_2$ su $I_1 \cap I_2$.*

Dimostrazione. ⁶ Sia $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t_0, t]\}$. Per assurdo, sia $t_1 = \sup J < \sup I_1 \cap I_2$, per cui $t_1 \in I_1 \cap I_2$. Applicando il Teorema di Cauchy–Lipschitz al problema di Cauchy con condizione iniziale $u(t_1) = u_1(t_1)$, si trova una contraddizione. Si giunge poi ad un'analogia contraddizione anche se $\inf J > \inf I_1 \cap I_2$. ■

⁶solo accennata a lezione

4 Prolungabilità ed esistenza globale

Definizione 12 Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione di (1). Diremo che una funzione $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un “prolungamento” di u se I è un sottoinsieme proprio di I_* e u_* è anch’essa una soluzione di (1). Si dice che u è una “soluzione massimale” se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione I viene allora detto “intervallo massimale di esistenza” di u .

Proposizione 13 L’intervallo massimale di esistenza di una soluzione è un intervallo aperto.

Dimostrazione. Se per assurdo l’intervallo massimale I contenesse il suo estremo destro $b = \max I$, potrei considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$$

e trovarne una soluzione $v : [b - \delta, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$, per un certo $\delta > 0$. Sia allora $u_* : I \cup [b, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in I \\ v(t) & \text{se } t \in]b, b + \delta]. \end{cases}$$

Si può verificare che u_* è derivabile (anche nel punto b) ed è un prolungamento di u , in contraddizione con l’ipotesi. Analogamente se I contenesse il suo estremo sinistro. ■

Teorema 14 (soluzione massimale) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora ogni problema di Cauchy (PC) ammette un’unica soluzione massimale definita su un intervallo $] \alpha, \beta [$, con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Dimostrazione. Sia $(t_0, u_0) \in \Omega$ e sia \mathcal{S} l’insieme di tutte le possibili soluzioni del problema (PC). Ogni soluzione $\tilde{u} \in \mathcal{S}$ avrà per dominio un intervallo contenente t_0 al suo interno, che indichiamo con $I_{\tilde{u}}$.

Sia $I = \bigcup_{\tilde{u} \in \mathcal{S}} I_{\tilde{u}}$. Definiamo $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ ponendo $u(t) = \tilde{u}(t)$ se $t \in I_{\tilde{u}}$. Bisogna verificare che questa è una buona definizione, cioè che il valore di $u(t)$ non dipende dalla scelta dell’intervallo $I_{\tilde{u}}$ a cui t appartiene. Sia dunque $t \in I_{u_1} \cap I_{u_2}$, con $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$. Per l’unicità, si ha che $u_1 = u_2$ su $I_{u_1} \cap I_{u_2}$, per cui $u_1(t) = u_2(t)$.

Per costruzione u è soluzione del problema (PC). Se ora $u^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione tale che $I \subseteq I^*$ e $u^*(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$, allora $u^* \in \mathcal{S}$, perciò per la definizione di I si ha $I^* \subseteq I$. Quindi $u = u^*$, ossia u non ammette prolungamenti: è una soluzione massimale. ■

Teorema 15 (uscita dai compatti) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e sia u soluzione del problema (PC) sul suo intervallo massimale $] \alpha, \beta [$. Allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ contenente (t_0, x_0) esistono un $a_0 \in] \alpha, t_0 [$ e un $b_0 \in] t_0, \beta [$ tali che

$$t \in] \alpha, a_0 [\cup] b_0, \beta [\Rightarrow (t, u(t)) \notin K.$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno del seguente risultato preliminare.⁷

⁷NON FATTO A LEZIONE

Lemma 16 *Sia f continua e localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) su un intervallo $]a, b[$. Se esiste una successione crescente $(t_n)_n$ in $]t_0, b[$ tale che $t_n \rightarrow b^-$ e $u(t_n) \rightarrow \bar{u}$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$, con $(b, \bar{u}) \in \Omega$, allora la soluzione u è prolungabile all'intervallo $]a, b]$.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione $\tilde{u} :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ in questo modo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t < b \\ \bar{u} & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Siccome

$$u(t_n) = u_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, u(s)) ds,$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\tilde{u}(b) = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, u(s)) ds = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, \tilde{u}(s)) ds,$$

e pertanto

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in]a, b].$$

Se dimostriamo che \tilde{u} è continua, per il Teorema 3 avremo che essa è soluzione del problema (PC) sull'intervallo $]a, b]$, quindi è un prolungamento di u , il che è una contraddizione. Faremo quindi vedere che \tilde{u} è continua anche in b , ossia che $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = \bar{u}$.

Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$K := [b - r_1, b + r_1] \times \bar{B}(\bar{u}, r_2) \subseteq \Omega,$$

e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

Fissiamo $\varepsilon \in]0, r_2[$. Esiste un \bar{n} tale che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$b - t_n < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \|u(t_n) - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$t \in [t_{\bar{n}}, b[\Rightarrow \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per assurdo, supponiamo che l'insieme

$$E = \left\{ t \in [t_{\bar{n}}, b[: \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

sia non vuoto, e poniamo $\tau = \inf E$. Per la continuità, $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$, e quindi $\tau > t_{\bar{n}}$. Notiamo inoltre che

$$\xi \in [t_{\bar{n}}, \tau[\Rightarrow \|u(\xi) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\xi, u(\xi)) \in K.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| &\leq \sup\{\|u'(\xi)\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &= \sup\{\|f(\xi, u(\xi))\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &\leq M(\tau - t_{\bar{n}}) \leq M(b - t_{\bar{n}}) < M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

una contraddizione. ■

Naturalmente, vale un lemma analogo se $t_n \rightarrow a^+$.

Dimostrazione del Teorema 15. Se $\beta = +\infty$, basta prendere $b_0 > t_0$ sufficientemente grande. Se $\beta \in \mathbb{R}$, supponiamo che esista un compatto $K_0 \subseteq \Omega$ e una successione crescente $(t_n)_n$ in $]t_0, \beta[$ tale che $t_n \rightarrow \beta^-$ e $(t_n, u(t_n)) \in K_0$. Per la compattezza di K_0 , esiste una sottosuccessione $(t_{n_k})_k$ tale che $(t_{n_k}, u(t_{n_k})) \rightarrow (\beta, \bar{u}) \in K_0$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$. Per il Lemma 16, la soluzione u si può estendere a $] \alpha, \beta]$, una contraddizione. Analogo ragionamento per α . ■

Osserviamo che, anche quando l'insieme Ω ha una proiezione sulla coordinata t che coincide con tutto \mathbb{R} , l'intervallo di esistenza massimale $] \alpha, \beta [$ potrebbe essere un sottoinsieme proprio di \mathbb{R} . Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(u) = u^2$. Si verifica subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

ha come soluzione $u(t) = (1 - t)^{-1}$, per cui $] \alpha, \beta [=] - \infty, 1 [$.

Per garantire l'“esistenza globale” della soluzione u , è necessario controllarne la crescita in norma. Ad esempio, si può dimostrare il seguente risultato, dove $\Omega = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N$ con \mathcal{I} un intervallo aperto.

Teorema 17 (esistenza globale) *Sia $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Se inoltre esiste una funzione continua $\ell : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty[$ per cui*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (4)$$

per ogni $(t, v) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N$, allora la soluzione del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a tutto \mathcal{I} .

Nella dimostrazione avremo bisogno del seguente

Lemma 18 (di Gronwall) *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$ e $\varphi : I \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua. Se esistono $A, B \in [0, +\infty[$ tali che*

$$\varphi(t) \leq A + B \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|, \quad \text{per ogni } t \in I,$$

allora

$$\varphi(t) \leq A e^{B|t-t_0|}, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo dapprima l'intervallo $I \cap [t_0, +\infty[$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e definiamo la funzione $\Phi_\varepsilon : I \cap [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\Phi_\varepsilon(t) = A + \varepsilon + B \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Allora, per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$,

$$\Phi'_\varepsilon(t) = B\varphi(t) \leq B\Phi_\varepsilon(t),$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi_\varepsilon(t) \leq B.$$

Integrando su $[t_0, t]$,

$$\ln \frac{\Phi_\varepsilon(t)}{\Phi_\varepsilon(t_0)} \leq B(t - t_0),$$

da cui

$$\varphi(t) \leq \Phi_\varepsilon(t) \leq \Phi_\varepsilon(t_0)e^{B(t-t_0)} = (A + \varepsilon)e^{B(t-t_0)},$$

per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$ e ogni $\varepsilon > 0$. Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$\varphi(t) \leq Ae^{B(t-t_0)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap [t_0, +\infty[.$$

Consideriamo ora l'intervallo $I \cap]-\infty, t_0]$. Definiamo l'intervallo $J = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau = 2t_0 - t, \text{ con } t \in I\}$ e la funzione $\psi : J \rightarrow [0, +\infty[$ definita da $\psi(\tau) = \varphi(2t_0 - \tau)$. Se $t \in I \cap]-\infty, t_0]$, allora $\tau = 2t_0 - t \in J \cap [t_0, +\infty[$ e

$$\psi(\tau) = \varphi(2t_0 - \tau) \leq A + B \int_{2t_0 - \tau}^{t_0} \varphi(2t_0 - s) ds = A + B \int_{t_0}^{\tau} \psi(\sigma) d\sigma.$$

Per quanto visto sopra,

$$\psi(\tau) \leq Ae^{B(\tau-t_0)}, \quad \text{per ogni } \tau \in J \cap [t_0, +\infty[,$$

per cui

$$\varphi(t) \leq Ae^{B(t_0-t)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap]-\infty, t_0].$$

La dimostrazione è così completa. ■

Dimostrazione del Teorema 17. Sia $\mathcal{I} =]a, b[$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e sia $u :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione del problema (PC), definita sul suo intervallo massimale, con $a \leq \alpha < t_0 < \beta \leq b$. Supponiamo per assurdo che $\beta < b$. In particolare, $\beta \in \mathbb{R}$, e poniamo

$$\ell_1 = \max\{\ell(t) : t \in [t_0, \beta]\}, \quad R = [\|u_0\| + \ell_1|\beta - t_0|] e^{\ell_1(\beta-t_0)}.$$

Preso il compatto $K = [t_0, \beta] \times \overline{B}(0, R)$, possiamo applicare il Teorema 15(uscita dai compatti) e trovare un $b_0 \in]t_0, \beta[$ tale che

$$t \in]b_0, \beta[\Rightarrow u(t) \notin \overline{B}(0, R).$$

D'altra parte, per ogni $t \in [t_0, \beta[$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \ell(s)(\|u(s)\| + 1) ds \\ &\leq [\|u_0\| + \ell_1(\beta - t_0)] + \ell_1 \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall, con $\varphi(t) = \|u(t)\|$, abbiamo che, per ogni $t \in [t_0, \beta[$,

$$\|u(t)\| \leq [\|u_0\| + \ell_1(\beta - t_0)] e^{\ell_1(t-t_0)} < R,$$

una contraddizione. Quindi $\beta = b$. In modo analogo si dimostra che $\alpha = a$, concludendo che l'intervallo di definizione della soluzione massimale coincide con l'intervallo \mathcal{I} . ■

5 Dipendenza dai dati

Nelle applicazioni è importante avere una “dipendenza continua” dai dati del problema che si vuole studiare. Infatti, le misurazioni non sono mai esatte, ma presentano delle piccole imprecisioni, che però non dovrebbero influire troppo sulle previsioni date dal modello matematico.

Nell’enunciato seguente, supponiamo per semplicità che sia $\Omega = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 19 (dipendenza continua dai dati) *Sia $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua, localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Supponiamo che esista una funzione continua $\ell : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty[$ tale che*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (5)$$

per ogni $(t, v) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N$. Sia $u : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^N$ la soluzione massimale del problema (PC). Fissati a, b tali che $a < t_0 < b$ e $[a, b] \subset \mathcal{I}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N$ e la funzione continua $\tilde{f} : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ soddisfano

$$|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta, \quad \|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta, \quad \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,^8$$

allora ogni soluzione $\tilde{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

è tale che

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b] \cap J.$$

Siccome per la funzione \tilde{f} abbiamo chiesto solo la continuità, il problema di Cauchy (\widetilde{PC}) potrebbe avere più soluzioni. Aggiungendo l’ipotesi di locale lipschitzianità rispetto alla seconda variabile per \tilde{f} si può dimostrare che la soluzione massimale di (\widetilde{PC}) è definita su \mathcal{I} . La tesi in questo caso diventa $\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon$ per ogni $t \in [a, b]$.

Dimostrazione. Prenderemo $\delta \in]0, 1]$, per cui si trova facilmente una funzione continua $\hat{\ell} : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty[$ tale che, se $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta$, allora

$$\|\tilde{f}(t, v)\| \leq \hat{\ell}(t)(\|v\| + 1),$$

per ogni $(t, v) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N$. Seguendo la dimostrazione del Teorema 17, ponendo $\hat{\ell}_1 = \max\{\hat{\ell}(t) : t \in [a, b]\}$, se $\tilde{t}_0 \in [a, b]$ e $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$ si ha che

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq [(\|u_0\| + 1) + \hat{\ell}_1(b - a)]e^{\hat{\ell}_1(b - a)} := R \quad \text{per ogni } t \in [a, b] \cap J.$$

Sia $K = [a, b] \times \overline{B}(0, R)$, un compatto, sia L_K la relativa costante di Lipschitz di f su K (vedi la Proposizione 6), e sia

$$M = \max\{\|f(t, v)\| : (t, v) \in K\}.$$

Siccome $\delta \leq 1$, abbiamo che

$$\max\{\|\tilde{f}(t, v)\| : (t, v) \in [a, b] \times \overline{B}(0, R)\} \leq M + 1.$$

⁸Qui $\|g\|_\infty = \sup\{g(t, x) : (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^N\}$.

Scriviamo

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds.$$

Allora, per $t \in [a, b] \cap J$ con $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \left\| u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))) ds + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds + \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds \right| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + L_K \int_{t_0}^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\| ds + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0|. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(t-t_0)} \\ &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(b-a)}. \end{aligned}$$

Analogamente se $t < t_0$. Da qui la conclusione. ■

Si potrebbe dimostrare un risultato più generale, che qui solo enunciamo.

Teorema 20 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua e localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e sia $(t_0, u_0) \in \Omega$. Indichiamo con u la soluzione del problema (PC), definita sull'intervallo massimale $] \alpha, \beta [$. Fissato un intervallo compatto $[a, b] \subseteq] \alpha, \beta [$, contenente al suo interno t_0 , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \Omega$ e $\tilde{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ soddisfano*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta, \quad \|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta, \quad \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,$$

allora ogni soluzione $\tilde{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

soddisfa

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b] \cap J.$$

6 Altri esempi di equazioni scalari del primo ordine

6.1 Equazione di Bernoulli

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. Un'equazione differenziale del tipo

$$u' = a(t)u + b(t)u^\alpha,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1$ viene chiamata equazione di Bernoulli. Si osserva subito che per $\alpha > 0$ la funzione costante $u = 0$ è soluzione dell'equazione. Consideriamo il problema di Cauchy associato con $u(t_0) = u_0 \neq 0$. La soluzione resterà quindi diversa da zero in un intorno I_0 di t_0 . Dividiamo l'equazione per u^α e poniamo $v = u^{1-\alpha}$. Allora v risolve l'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine:

$$v' = (1 - \alpha)a(t)v + (1 - \alpha)b(t)$$

con la condizione iniziale $v(t_0) = u_0^{1-\alpha}$. Trovata v si determina u , facendo attenzione al fatto che il ragionamento vale finché la soluzione v rimane positiva (o negativa).

6.2 Equazioni omogenee

Sia $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. L'equazione differenziale

$$u' = g\left(\frac{u}{t}\right)$$

è detta equazione differenziale omogenea (del primo ordine). Con la sostituzione $v(t) = \frac{u(t)}{t}$ ci si riconduce a un'equazione a variabili separabili:

$$v'(t) = \frac{u'(t)t - u(t)}{t^2} = \frac{1}{t}(g(v(t)) - v(t)).$$

7 Sistemi lineari

Studiamo un "sistema lineare" del tipo

$$u' = \mathbb{A}(t)u + b(t), \tag{6}$$

dove $\mathbb{A}(t)$ è una matrice $N \times N$ e $b(t)$ un vettore di \mathbb{R}^N , entrambi dipendenti in modo continuo da $t \in \mathbb{R}$. Quindi, se indichiamo con \mathcal{M}_N l'insieme delle matrici $N \times N$, le due funzioni $\mathbb{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono continue.

Dalla teoria generale possiamo subito affermare che i problemi di Cauchy associati all'equazione (6) avranno soluzione unica e globalmente definita.

Nel caso in cui sia $b = 0$, avremo l'equazione omogenea associata

$$u' = \mathbb{A}(t)u. \tag{7}$$

Nella pratica può essere utile la seguente semplice osservazione.

Proposizione 21 *Sia $\bar{u}(t)$ una soluzione particolare di (6). Allora ogni altra soluzione $u(t)$ di (6) si ottiene come somma $u(t) = \bar{u}(t) + v(t)$, dove $v(t)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata (7).*

Dimostrazione. Se $u(t) = \bar{u}(t) + v(t)$, con $v(t)$ soluzione dell'equazione (7), allora

$$\begin{aligned} u'(t) &= \bar{u}'(t) + v'(t) = [\mathbb{A}(t)\bar{u}(t) + b(t)] + \mathbb{A}(t)v(t) \\ &= \mathbb{A}(t)(\bar{u}(t) + v(t)) + b(t) = \mathbb{A}(t)u(t) + b(t). \end{aligned}$$

Viceversa, se $u(t)$ è una soluzione di (6), allora $u = \bar{u} + (u - \bar{u})$, e

$$(u - \bar{u})'(t) = [\mathbb{A}(t)\bar{u}(t) + b(t)] - [\mathbb{A}(t)\bar{u}(t) + b(t)] = \mathbb{A}(t)(u - \bar{u})(t),$$

per cui $u - \bar{u}$ è soluzione di (7). ■

7.1 L'equazione omogenea

Indicheremo con \mathcal{S} l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (7). Ricordiamo che ogni $u \in \mathcal{S}$ è definita su tutto \mathbb{R} .

Proposizione 22 *L'insieme \mathcal{S} delle soluzioni di (7) è un sottospazio vettoriale di $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Esso ha dimensione N .*

Dimostrazione. È facile vedere che, se $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono soluzioni di (7) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono due costanti, allora anche $\alpha u_1 + \beta u_2$ è una soluzione. Pertanto \mathcal{S} è un sottospazio vettoriale di $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Fissato t_0 , consideriamo la funzione $\delta_{t_0} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ che a ogni soluzione u di (7) associa il valore $u(t_0)$. Si tratta di un'applicazione lineare. Inoltre, per l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}^N$ esiste un'unica soluzione u di (7) tale che $u(t_0) = u_0$. L'applicazione δ_{t_0} è quindi biiettiva, dunque un isomorfismo tra spazi vettoriali. Di conseguenza, $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{R}^N = N$. ■

Può essere utile la seguente

Proposizione 23 *Date $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{S}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) ϕ_1, \dots, ϕ_p sono linearmente indipendenti;
- (ii) esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$ sono linearmente indipendenti;
- (iii) per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che $\phi_1(t), \dots, \phi_p(t)$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. È chiaro che (iii) implica (ii).

Dimostriamo che (ii) implica (i). Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$ sono linearmente indipendenti. Se una combinazione lineare $c_1\phi_1 + \dots + c_p\phi_p$ è nulla, per definizione si avrà che $c_1\phi_1(t) + \dots + c_p\phi_p(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi in particolare $c_1\phi_1(t_0) + \dots + c_p\phi_p(t_0) = 0$. Da (ii) segue allora che $c_1 = \dots = c_p = 0$, da cui (i).

Verifichiamo infine che (i) implica (iii). Supponiamo che valga (i) e che per assurdo non valga (iii). Allora esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ per cui $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$ sono linearmente dipendenti, cioè esistono c_1, \dots, c_p non tutti nulli tali che $c_1\phi_1(t_0) + \dots + c_p\phi_p(t_0) = 0$. Poniamo $u = c_1\phi_1 + \dots + c_p\phi_p$. Essendo \mathcal{S} spazio vettoriale, si ha che $u \in \mathcal{S}$, per cui u è soluzione del problema di Cauchy $u' = \mathbb{A}(t)u$, $u(t_0) = 0$. Ma siccome anche la funzione nulla è soluzione di tale problema di Cauchy, per unicità si ha che $u = 0$, ossia $c_1\phi_1 + \dots + c_p\phi_p = 0$, in contraddizione con (i). ■

Definizione 24 *Si chiama “funzione matrice fondamentale” (brevemente “matrice fondamentale”) associata a (7) una qualsiasi funzione $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N$ tale che, indicati con $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ i vettori corrispondenti alle colonne della matrice $\Phi(t)$, si ha che $\phi_1, \dots, \phi_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono una base di \mathcal{S} .*

Proposizione 25 *Se $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N$ è una matrice fondamentale associata a (7), allora*

$$\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t),$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, ogni $u \in \mathcal{S}$ può essere rappresentata come $u(t) = \Phi(t)c$, per un certo $c \in \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Fissata una matrice fondamentale $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_N(t))$, si ha

$$\Phi'(t) = (\phi_1'(t), \dots, \phi_N'(t)) = (\mathbb{A}(t)\phi_1(t), \dots, \mathbb{A}(t)\phi_N(t)) = \mathbb{A}(t)\Phi(t).$$

Si vede poi che, se $u(t) = \Phi(t)c$, per un certo $c \in \mathbb{R}^N$, allora

$$u'(t) = \Phi'(t)c = [\mathbb{A}(t)\Phi(t)]c = \mathbb{A}(t)[\Phi(t)c] = \mathbb{A}(t)u(t),$$

per cui u è una soluzione di (7). Viceversa, presa una soluzione u di (7), sia ad esempio $u(t_0) = u_0$. Allora, ponendo $c = \Phi(t_0)^{-1}u_0$, la funzione $w(t) = \Phi(t)c$ è una soluzione di (7) tale che $w(t_0) = \Phi(t_0)\Phi(t_0)^{-1}u_0 = u_0$ e quindi, per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, deve coincidere con $u(t)$. ■

7.2 L'equazione non omogenea

Il seguente teorema di Lagrange illustra il metodo della “variazione delle costanti”.

Teorema 26 *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \mathbb{A}(t)u + b(t), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (8)$$

ha come soluzione

$$u(t) = \Phi(t) \left(\Phi(t_0)^{-1}u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) ds \right).$$

dove $\Phi(t)$ è una qualsiasi matrice fondamentale relativa al sistema omogeneo associato (7).

Dimostrazione. La generica soluzione dell'equazione omogenea associata $u' = \mathbb{A}(t)u$ è del tipo $u(t) = \Phi(t)c$, dove $\Phi(t)$ è una qualsiasi matrice fondamentale associata a (7) e c è un generico elemento di \mathbb{R}^N . Cerchiamo una funzione derivabile $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che la funzione $u(t) = \Phi(t)c(t)$ sia soluzione del problema (8). Anzitutto dovrà essere $\Phi(t_0)c(t_0) = u_0$, da cui $c(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}u_0$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Phi(t)c(t)) &= \mathbb{A}(t)(\Phi(t)c(t)) + b(t) \\ \Leftrightarrow \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) &= (\mathbb{A}(t)\Phi(t))c(t) + b(t) \\ \Leftrightarrow \Phi(t)c'(t) &= b(t) \\ \Leftrightarrow c'(t) &= \Phi(t)^{-1}b(t). \end{aligned}$$

Allora

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t c'(s) ds = \Phi(t_0)^{-1}u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) ds,$$

da cui la tesi. ■

Esempio. Vogliamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + 4x = 3t, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Lo scriviamo nella forma canonica come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x + 3t, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Una matrice fondamentale associata al sistema omogeneo è

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'inversa, osservando che il suo determinante è -2 :

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) & -\cos(2t) \\ -2 \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) & \frac{1}{2} \cos(2t) \\ \cos(2t) & -\frac{1}{2} \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

La soluzione $u(t) = (x(t), y(t))$ è data quindi da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s \cos(2s) \\ -\frac{3}{2}s \sin(2s) \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t \sin(2t) + \frac{3}{8} \cos(2t) + \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4}t \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{4}t \\ \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{3}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione di (9) è quindi $x(t) = \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{4}t$.

Un modo equivalente: scriviamo la soluzione cercata $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ di (10) come $u(t) = \Phi(t)c(t)$, e cerchiamo di trovare la funzione $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Indicando con $c_1(t), c_2(t)$ le componenti di $c(t)$, avremo che

$$x(t) = \sin(2t)c_1(t) + \cos(2t)c_2(t), \quad y(t) = 2 \cos(2t)c_1(t) - 2 \sin(2t)c_2(t).$$

Derivando la prima, abbiamo che

$$x'(t) = 2 \cos(2t)c_1(t) + \sin(2t)c_1'(t) - 2 \sin(2t)c_2(t) + \cos(2t)c_2'(t).$$

Essendo $x'(t) = y(t)$, vediamo che deve essere

$$\sin(2t)c_1'(t) + \cos(2t)c_2'(t) = 0.$$

Procediamo quindi derivando una seconda volta:

$$x''(t) = -4 \sin(2t)c_1(t) + 2 \cos(2t)c_1'(t) - 2 \cos(2t)c_2(t) - 2 \sin(2t)c_2'(t),$$

e imponendo che $x(t)$ sia soluzione dell'equazione differenziale, otteniamo che

$$2 \cos(2t)c_1'(t) - 2 \sin(2t)c_2'(t) = 3t.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \sin(2t)c_1'(t) + \cos(2t)c_2'(t) = 0 \\ 2\cos(2t)c_1'(t) - 2\sin(2t)c_2'(t) = 3t, \end{cases}$$

troviamo che

$$c_1'(t) = \frac{3}{2}t \cos(2t), \quad c_2'(t) = -\frac{3}{2}t \sin(2t),$$

da cui

$$c_1(t) = \frac{3}{4}t \sin(2t) + \frac{3}{8} \cos(2t) + \gamma_1, \quad c_2(t) = \frac{3}{4}t \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t) + \gamma_2,$$

dove γ_1 e γ_2 sono costanti da determinarsi. Troviamo così

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{3}{4}t \sin(2t) + \frac{3}{8} \cos(2t) + \gamma_1\right) \sin(2t) + \left(\frac{3}{4}t \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t) + \gamma_2\right) \cos(2t) \\ &= \frac{3}{4}t + \gamma_1 \sin(2t) + \gamma_2 \cos(2t). \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $x(0) = 0$ abbiamo che $\gamma_2 = 0$. Inoltre, imponendo che sia $x'(0) = 1$ abbiamo che $\gamma_1 = \frac{1}{8}$. La soluzione del problema (9) è quindi $x(t) = \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} \sin(2t)$.

Si noti che c'è un procedimento molto più rapido per trovare la soluzione di (9). Infatti, si vede subito che una soluzione particolare dell'equazione $x'' + 4x = 3t$ è $\bar{x}(t) = \frac{3}{4}t$. Allora tutte le soluzioni dell'equazione sono del tipo

$$x(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t) + \frac{3}{4}t.$$

Imponendo la condizione $x(0) = 0$ vediamo che deve essere $\beta = 0$. Inoltre, imponendo la condizione $x'(0) = 1$ troviamo $\alpha = \frac{1}{8}$. Quindi, la soluzione del problema (9) è $\bar{x}(t) = \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{4}t$.

Nota. Una particolare matrice fondamentale è data da⁹

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbb{A}(s) ds}.$$

Si può quindi scrivere una soluzione del problema (8) nella forma

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbb{A}(s) ds} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} \mathbb{A}(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right),$$

che è analoga alla formula trovata nel caso scalare.

⁹Per far questo, bisogna però definire l'esponenziale di una matrice. Lo si può fare in modi diversi, ispirandosi alle note formule

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Se \mathbb{A} è una matrice $N \times N$, si può in effetti definire la matrice $e^{\mathbb{A}}$ in uno di questi due modi:

$$e^{\mathbb{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} \mathbb{A}\right)^n, \quad e^{\mathbb{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{A}^n,$$

con $\mathbb{A}^0 = I$. Il calcolo esplicito della matrice potrebbe però non essere agevole.

7.3 Equazioni lineari di ordine N

Consideriamo un'equazione differenziale lineare di ordine N :

$$x^{(N)} + a_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = h(t). \quad (11)$$

Possiamo riscriverla nella forma

$$u' = \mathbb{A}(t)u + b(t),$$

con $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, ponendo

$$u_1 = x, u_2 = x', \dots, u_N = x^{(N-1)},$$

e

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Spesso in questo caso una matrice fondamentale $\Phi(t)$ prende il nome di “matrice wronskiana” e si denota con $W(t)$.

Proposizione 27 *Se $x_1, \dots, x_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni linearmente indipendenti, di classe C^{N-1} , allora le funzioni $\phi_1, \dots, \phi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ definite da*

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \phi_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ x_p'(t) \\ \vdots \\ x_p^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e viceversa.

Dimostrazione. Siano x_1, \dots, x_p linearmente indipendenti, e sia $\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_p\phi_p = 0$. Allora anche $\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_px_p = 0$, da cui $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Pertanto, ϕ_1, \dots, ϕ_p sono linearmente indipendenti.

Viceversa, siano ϕ_1, \dots, ϕ_p linearmente indipendenti, e sia $\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_px_p = 0$. Derivando, si trova che

$$\alpha_1x_1' + \dots + \alpha_px_p' = 0, \quad \dots, \quad \alpha_1x_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_px_p^{(n-1)} = 0,$$

per cui $\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_p\phi_p = 0$. Ne segue che $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$, per cui x_1, \dots, x_p sono linearmente indipendenti. ■

Quindi, se $x_1, \dots, x_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

$$x^{(N)} + a_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0.$$

potremo scrivere la matrice wronskiana

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_N(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_N'(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(N-1)}(t) & \dots & x_N^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Ci concentreremo sul caso particolare “a coefficienti costanti”

$$x^{(N)} + a_{N-1}x^{(N-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = h(t). \quad (12)$$

L'equazione omogenea associata è

$$x^{(N)} + a_{N-1}x^{(N-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0. \quad (13)$$

Si definisce il “polinomio caratteristico”

$$p(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + a_{N-2}\lambda^{N-2} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Se $p(\lambda)$ ha N radici reali distinte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, si vede facilmente che sono soluzioni linearmente indipendenti di (13) le seguenti:

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_N t}.$$

Se invece λ_k è una radice reale di molteplicità ν_k , alla funzione $e^{\lambda_k t}$ bisognerà sostituire

$$e^{\lambda_k t}, \quad t e^{\lambda_k t}, \quad \dots, \quad t^{\nu_k-1} e^{\lambda_k t}.$$

Se $p(\lambda)$ ha un autovalore complesso $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$, automaticamente ha anche l'autovalore complesso coniugato $\alpha - i\beta$. In questo caso, al posto di $e^{\lambda t}$ bisogna considerare le soluzioni

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Quindi, se l'autovalore λ ha molteplicità ν , bisognerà considerare le seguenti:

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad t e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad \dots, \quad t^{\nu-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad t e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad \dots, \quad t^{\nu-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda una soluzione particolare dell'equazione (12), si può utilizzare il metodo della variazione delle costanti (Teorema di Lagrange). In alternativa, c'è il cosiddetto “metodo per simiglianza”, che può essere applicato quando $h(t)$ è un polinomio $P(t)$, oppure è del tipo

$$P(t)e^{\gamma t}, \quad P(t)e^{\gamma t} \cos(\mu t), \quad P(t)e^{\gamma t} \sin(\mu t).$$

Caso 1: $h(t) = P(t)$ è un polinomio di grado m . Allora una soluzione particolare $x(t)$ può essere cercata tra

- 1a. i polinomi $Q(t)$ di grado m se 0 non è radice dell'equazione caratteristica;
- 1b. i polinomi della forma $t^\nu Q(t)$ con $Q(t)$ polinomio di grado m , se 0 è radice di molteplicità ν dell'equazione caratteristica.

Caso 2: $h(t) = P(t)e^{\gamma t}$, con $P(t)$ polinomio di grado m . Allora cerchiamo $x(t)$ nella forma

2a. $Q(t)e^{\gamma t}$ con $Q(t)$ polinomio di grado m , se γ non è radice dell'equazione caratteristica;

2b. $t^\nu Q(t)e^{\gamma t}$, con $Q(t)$ polinomio di grado m , se γ è radice di molteplicità ν dell'equazione caratteristica.

Caso 3: $h(t) = P(t)e^{\gamma t} \cos(\mu t)$ oppure $h(t) = P(t)e^{\gamma t} \sin(\mu t)$, con $P(t)$ polinomio di grado m . Allora cerchiamo $x(t)$ nella forma

3a. $Q(t)e^{\gamma t}(a \cos(\mu t) + b \sin(\mu t))$, con $Q(t)$ polinomio di grado m , se $\gamma + i\mu$ non è radice dell'equazione caratteristica;

3b. $t^\nu Q(t)e^{\gamma t}(a \cos(\mu t) + b \sin(\mu t))$, con $Q(t)$ polinomio di grado m , se $\gamma + i\mu$ è radice di molteplicità ν dell'equazione caratteristica.

Se $h(t)$ dovesse essere combinazione lineare di alcune delle formule precedenti, si cercherà $x(t)$ come combinazione lineare delle rispettive funzioni qui sopra evidenziate.

7.4 Il fenomeno della risonanza

Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$x'' + \lambda x = e(t), \quad (14)$$

con $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e T -periodica, e $\lambda > 0$.

Siccome $\lambda > 0$, le soluzioni dell'equazione

$$x'' + \lambda x = 0 \quad (15)$$

sono tutte periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$:

$$x(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono ellissi di equazione $\lambda x^2 + y^2 = c$, con $c \geq 0$, che circondano l'origine, il quale pertanto è un **centro isocrono**.

Consideriamo ora, sempre per $\lambda > 0$, l'equazione (14) e scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x + e(t). \end{cases}$$

Ponendo $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la soluzione con punto iniziale $u(0) = u_0$ è data da

$$u(t) = W(t) \left(u_0 + \int_0^t W^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ e(s) \end{pmatrix} ds \right),$$

dove $W(t)$ è la matrice wronskiana con $W(0) = I$:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} t) & \cos(\sqrt{\lambda} t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e sviluppando, essendo

$$W^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} s) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} s) \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} s) & \cos(\sqrt{\lambda} s) \end{pmatrix},$$

troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\sqrt{\lambda} t) \left(x_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right), \\ y(t) &= -\sin(\sqrt{\lambda} t) \left(\sqrt{\lambda} x_0 - \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \cos(\sqrt{\lambda} t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right). \end{aligned}$$

Siccome le soluzioni dell'equazione omogenea sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ e la funzione e è periodica di periodo T , studiamo l'esistenza di soluzioni periodiche dell'equazione non omogenea. Distinguiamo due casi.

I caso: Supponiamo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}L = T$ per un certo intero positivo L , ossia $\lambda = \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2$. Si ha

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0 - \frac{T}{2\pi L} \int_0^T e(s) \sin\left(\frac{2\pi L}{T}s\right) ds \\ y(T) &= y_0 + \int_0^T e(s) \cos\left(\frac{2\pi L}{T}s\right) ds. \end{aligned}$$

Considerando i coefficienti di Fourier della funzione e ¹⁰

$$a_L = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos\left(\frac{2\pi L}{T}s\right) ds, \quad b_L = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin\left(\frac{2\pi L}{T}s\right) ds,$$

si vede che

$$x(T) = x_0 - \frac{T^2 b_L}{4\pi L}, \quad y(T) = y_0 + \frac{T a_L}{2}.$$

Quindi, in questo caso, ci sono soluzioni T -periodiche di (14) se e solo se $a_L = b_L = 0$. In tal caso, **tutte le soluzioni** di (14) **sono T -periodiche**.

¹⁰Si ha

$$e(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right).$$

Al contrario, se $a_L \neq 0$ o $b_L \neq 0$, **tutte le soluzioni** di (14) **sono illimitate**, sia in passato che in futuro. Si vede infatti che, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$x(kT) = x_0 - k \frac{T^2 b_L}{4\pi L}, \quad y(kT) = y_0 + k \frac{T a_L}{2}.$$

II caso: $\lambda > 0$ è tale che $\lambda \neq (\frac{2\pi n}{T})^2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds, \quad \beta_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds.$$

Cerchiamo una soluzione T -periodica di (14) imponendo che sia $u(T) = u_0$. Risolvendo il sistema $\{x(T) = x_0, y(T) = y_0\}$, ossia

$$\begin{cases} x_0 = \cos(\sqrt{\lambda} T) \left(x_0 - \frac{T}{2\sqrt{\lambda}} \beta_\lambda \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} T) \left(y_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \\ y_0 = -\sin(\sqrt{\lambda} T) \left(\sqrt{\lambda} x_0 - \frac{T}{2} \beta_\lambda \right) + \cos(\sqrt{\lambda} T) \left(y_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \end{cases}$$

troviamo

$$x_0 = \frac{T}{4\sqrt{\lambda}} \left(\beta_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} T)}{1 - \cos(\sqrt{\lambda} T)} \alpha_\lambda \right), \quad y_0 = \frac{T}{4} \left(-\alpha_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} T)}{1 - \cos(\sqrt{\lambda} T)} \beta_\lambda \right).$$

Quindi, in questo caso, **esiste un'unica soluzione T -periodica** di (14). La denotiamo con $x_{\lambda,e}(t)$. Tutte le **altre soluzioni** di (14) **sono** del tipo

$$x(t) = x_{\lambda,e}(t) + a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t),$$

e sono pertanto **tutte limitate** su \mathbb{R} .

Notiamo infine che, se λ tende a $(\frac{2\pi L}{T})^2$, per un certo $L \in \mathbb{N}$, allora $\alpha_\lambda \rightarrow a_L$, $\beta_\lambda \rightarrow b_L$ e l'ampiezza di $x_{\lambda,e}(t)$ tende all'infinito se $a_L \neq 0$ o $b_L \neq 0$.

8 Stabilità degli equilibri

Consideriamo un'equazione differenziale autonoma

$$u' = f(u), \tag{16}$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Si dice che $u_0 \in \Omega$ è un “equilibrio” o “punto stazionario” dell'equazione differenziale (16) se $f(u_0) = 0$. In altri termini, la funzione costante $u(t) = u_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale (16).

Definizione 28 Diremo che un punto di equilibrio u_0 è “stabile” se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta$, allora

$$\|u(t) - u_0\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \geq \tau.$$

Diremo che un equilibrio u_0 è “asintoticamente stabile” se è stabile ed esiste un $\delta' > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta'$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0.$$

Nel caso in cui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1 , abbiamo il seguente.

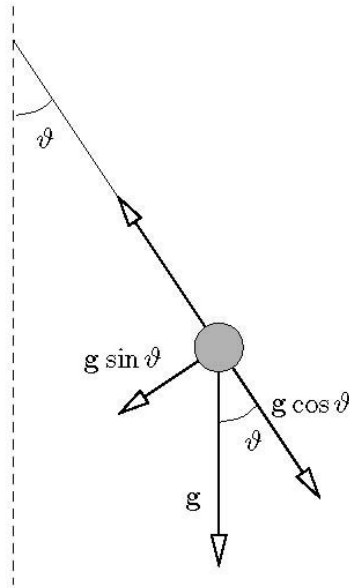
Teorema 29 *Sia u_0 un equilibrio per l'equazione differenziale (16). Se gli autovalori della matrice jacobiana $Jf(u_0)$ hanno tutti parte reale negativa, allora u_0 è asintoticamente stabile. Se esiste un autovalore con parte reale positiva, tale equilibrio non è stabile.*

8.1 L'equazione del pendolo

Analizziamo la ben nota equazione del pendolo matematico

$$\vartheta'' + c\vartheta' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0,$$

dove g è la costante di gravità e ℓ è la lunghezza del pendolo. Qui $c \geq 0$ è un coefficiente di attrito.



Ponendo $a = g/\ell$, passiamo al sistema equivalente nel piano delle fasi

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy - a \sin x. \end{cases}$$

Troviamo facilmente gli equilibri: sono i punti del tipo $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome la funzione seno è 2π -periodica, ci sono due punti di equilibrio geometricamente distinti, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, mentre tutti gli altri si ottengono da questi per 2π -periodicità.

Studiamo la stabilità di questi due punti di equilibrio. Calcoliamo

$$Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -c \end{pmatrix}, \quad Jf(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -c \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $Jf(0, 0)$ sono le soluzioni di $\lambda^2 + c\lambda + a = 0$. Se $c^2 > 4a$, sono entrambi reali e negativi: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4a})$; se $c^2 \in]0, 4a[$, sono complessi

coniugati, con parte reale negativa: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm i\sqrt{4a - c^2})$; Se $c = 0$, sono uguali a $\pm i\sqrt{a}$, quindi hanno parte reale nulla.

Gli autovalori di $Jf(\pi, 0)$ sono le soluzioni di $\lambda^2 + c\lambda - a = 0$. Essi sono entrambi reali, uno positivo e uno negativo: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 + 4a})$. Possiamo quindi concludere che l'equilibrio $(\pi, 0)$ non è stabile, mentre l'equilibrio $(0, 0)$ è stabile se $c > 0$.

Il caso $c = 0$ va trattato a parte: analizziamo le soluzioni $(x(t), y(t))$ nel piano delle fasi. Definiamo la seguente “funzione hamiltoniana”

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - a \cos x.$$

Si noti che il sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a \sin x \end{cases}$$

è del tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

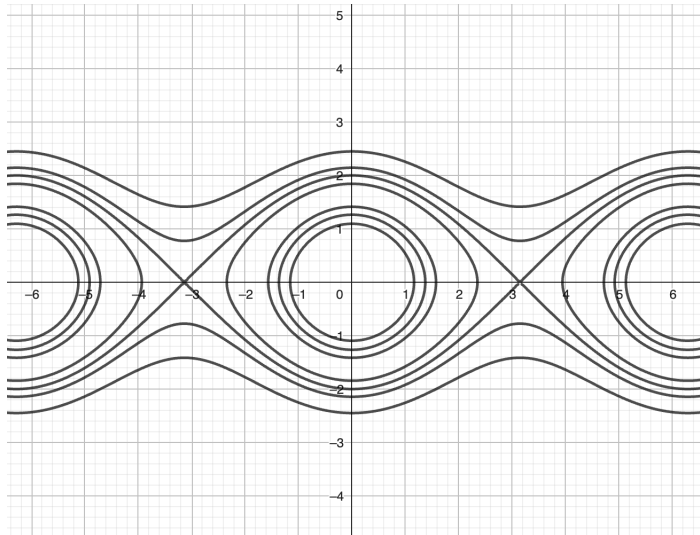
Esso è pertanto un “sistema hamiltoniano”. Per questo tipo di sistemi, se $(x(t), y(t))$ è una qualunque soluzione, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -y'(t)x'(t) + x'(t)y'(t) = 0, \end{aligned}$$

per cui $H(x(t), y(t))$ rimane costante al variare di t . Le orbite delle soluzioni sono pertanto le linee di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = \gamma\},$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}$ è una costante che può assumere svariati valori; esse sono visualizzate in figura. Siccome la funzione coseno è 2π -periodica, le linee di livello della funzione hamiltoniana presentano questo tipo di periodicità nella variabile x .



Il punto di equilibrio $(0, 0)$ è un “centro”: tutte le soluzioni vicine sono periodiche. Esso è pertanto stabile. Se indichiamo con $\tau(\alpha)$ il periodo della soluzione con punto iniziale $x(0) = \alpha$, $y(0) = 0$, si vede che, al variare di α in $]0, \pi[$, il periodo $\tau(\alpha)$ è strettamente crescente, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Il punto di equilibrio $(\pi, 0)$ è una “sella”. Esso è il punto di arrivo asintotico di una soluzione $(x^*(t), y^*(t))$, detta “eteroclina”, per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x^*(t) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \pi, \quad \text{e } y^*(t) > 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo anche la soluzione eteroclina simmetrica $(x_*(t), y_*(t))$, tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_*(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_*(t) = -\pi, \quad \text{e } y_*(t) < 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni la cui orbita attraversa l’asse verticale al di sopra del valore $2\sqrt{a}$ o al di sotto di $-2\sqrt{a}$ non sono periodiche. Esse corrispondono alla situazione fisica in cui il pendolo continua a ruotare in senso antiorario oppure orario, rispettivamente.

Nel caso in cui il pendolo venga sollecitato con una forza esterna periodica, esso può reagire in diversi modi. Il problema, di carattere prettamente nonlineare, è tuttora in fase di studio. Riportiamo il seguente interessante risultato, ottenuto da J. Mawhin e M. Willem nel 1984.

Teorema 30 *Sia $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e T -periodica, tale che*

$$\int_0^T e(t) dt = 0,$$

allora l’equazione differenziale

$$\vartheta'' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = e(t)$$

ha almeno due soluzioni T -periodiche geometricamente distinte.

Chiaramente, se l’equazione ha una soluzione T -periodica $\vartheta(t)$, tutte le funzioni che si ottengono da questa aggiungendo un multiplo intero di 2π sono ancora soluzioni T -periodiche. Si dice che due soluzioni sono *geometricamente distinte* se non si possono ottenere l’una dall’altra in questo modo.