integrali curvilinei: esercizi svolti

1.1 Esercizi sulla parametrizzazione delle curve

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti curve parametriche sono regolari:

a) $\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right), \quad t \in [-1, 1]$ [No]

b) $\gamma(t) = (\sin t, \pi - t), \quad t \in [-1, 1]$ [Sì]

c) $\gamma(t) = \left(\log(1+t), t - t^2, e^t\right), \quad t \in [2, 3].$ [Sì]

Svolgimento

a) La curva $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(2t, 3t^2\right)$. Poichè $\gamma'(t) = (0, 0)$ per $t = 0$ interno all'intervallo $[-1, 1]$, si ha che γ non è regolare. È invece regolare a tratti.

b) La curva $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \pi - t)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (\cos t, -1)$. Poichè $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (-1, 1)$, si ha che γ è regolare.

c) La curva $\gamma : [2, 3] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\log(1+t), t - t^2, e^t\right)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(\frac{1}{1+t}, 1 - 2t, e^t\right)$. Poichè $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$ per ogni $t \in (2, 3)$, si ha che γ è regolare.

Esercizio 2. Scrivere le equazioni parametriche delle rette del piano che verificano le seguenti condizioni:

a) retta passante per $P(4, 2)$ e parallela al vettore **u**$= (-1, 1)$

$$\left[\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

b) retta passante per $P(-3, -5)$ e parallela all'asse delle ascisse

$$\left[\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

$c)$ retta passante per $P(0,-2)$ e parallela all'asse delle ordinate

$$\left[\begin{cases} x = 0 \\ y = t-2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

$d)$ retta passante per $P_1(3,1)$ e $P_2(2,2)$

$$\left[\begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

Svolgimento

$a)$ La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}=(u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi per $P(4,2)$ e $\mathbf{u}=(-1,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 4-t \\ y = 2+t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$b)$ Una retta parallela all'asse delle ascisse è parallela al vettore $\mathbf{u}=(1,0)$. La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}=(u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi per $P(-3,-5)$ e $\mathbf{u}=(1,0)$ si ha

$$\begin{cases} x = t-3 \\ y = -5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$c)$ Una retta parallela all'asse delle ordinate è parallela al vettore $\mathbf{u}=(0,1)$. La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}=(u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi per $P(0,-2)$ e $\mathbf{u}=(0,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t-2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Una retta passante per i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è parallela al vettore $\mathbf{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Quindi per $P_1(3, 1)$ e $P_2(2, 2)$ si ottiene $\mathbf{u} = (-1, 1)$. La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi preso $P = P_1(3, 1)$ e $\mathbf{u} = (-1, 1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Scrivere delle equazioni parametriche della circonferenza del piano avente centro nel punto $C(2, -1)$ e raggio $r = 3$.

$$\left[\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \right]$$

Svolgimento

La circonferenza di centro $C(x_C, y_C)$ e raggio r ha, per esempio, equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_C + r\cos t \\ y = y_C + r\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Quindi per $C(2, -1)$ e $r = 3$ si ha

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 4. Scrivere le equazioni parametriche delle rette dello spazio che verificano le seguenti condizioni:

a) retta passante per $P(-1, 2, 0)$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$

$$\left[\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 + 3t, \\ z = -t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \right]$$

b) retta passante per $P(1, 3, -2)$ e parallela all'asse z

$$\left[\begin{cases} x = 1 \\ y = 3, \\ z = t - 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \right]$$

$c)$ retta passante per $P(4,0,0)$ e parallela all'asse y

$$\left[\begin{cases} x = 4 \\ y = t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 0, \end{cases}\right]$$

$d)$ retta passante per $P_1(3,3,3)$ e $P_2(-2,0,-7)$

$$\left[\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 3 - 3t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 10t, \end{cases}\right]$$

Svolgimento

$a)$ La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P(-1,2,0)$ e $\mathbf{u}= (1,3,-1)$ si ha

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 + 3t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = -t, \end{cases}$$

$b)$ Una retta parallela all'asse z è parallela al vettore $\mathbf{u}= (0,0,1)$. La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P(1,3,-2)$ e $\mathbf{u}= (0,0,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3, & t \in \mathbb{R}. \\ z = t - 2, \end{cases}$$

$c)$ Una retta parallela all'asse y è parallela al vettore $\mathbf{u}= (0,1,0)$. La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P(4,0,0)$ e $\mathbf{u}= (0,1,0)$ si ha

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0, \end{cases}$$

d) Una retta passante per i punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è parallela al vettore $\mathbf{u}= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Quindi per $P_1(3,3,3)$ e $P_2(-2,0,-7)$ si ottiene $\mathbf{u}= (-5,-3,-10)$. La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P = P_1(3,3,3)$ e $\mathbf{u}= (-5,-3,-10)$ si ha

$$\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 3 - 3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 10t, \end{cases}$$

1.2 Esercizi sulla lunghezza di una curva

Esercizio 1. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \left(t-1, 1-t^2, 2+\frac{2}{3}t^3\right)$, $t \in [0,1]$. Confrontare tale lunghezza con quella del segmento di estremi $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$.

$\left[\frac{5}{3},\ \overline{AB} = \frac{\sqrt{22}}{3}\right]$

Svolgimento

La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (1, -2t, 2t^2) \neq (0,0,0)$, per ogni $t \in (0,1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = 2t^2+1.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 \left(2t^2+1\right)dt = \left[\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Osserviamo che la lunghezza del segmento di estremi $A = \gamma(0) = (-1,1,2)$ e $B = \gamma(1) = \left(0,0,\frac{8}{3}\right)$ è $\overline{AB} = \frac{\sqrt{22}}{3}$.

Esercizio 2. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = (e^t, e^t+1)$, $t \in [0,1]$. Confrontare tale lunghezza con quella del segmento di estremi $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$.

$$\left[\sqrt{2}(e-1),\ \overline{AB} = \sqrt{2}(e-1)\right]$$

Svolgimento

La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (e^t, e^t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in (0,1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^t\, dt = \sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^1 = \sqrt{2}(e-1).$$

Osserviamo che la lunghezza del segmento di estremi $A = \gamma(0) = (1,2)$ e $B = \gamma(1) = (e, e+1)$ è $\overline{AB} = \sqrt{2}(e-1)$. Infatti, il sostegno di γ è proprio il segmento AB.

Esercizio 3. Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva:

a) $\gamma(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \left[\frac{\pi^2}{8}\right]$

b) $\gamma(t) = \left(\cos^2 t, \cos t \sin t\right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \left[\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\gamma(t) = \left(t^3, t^2\right), \quad t \in [0,1]$ $\qquad \left[\frac{(13)^{\frac{3}{2}}-8}{27}\right]$

e) $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ $\qquad \left[\frac{61}{216}\right]$

Svolgimento

a) La curva $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (t\sin t, t\cos t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = t.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) La curva $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(\cos^2 t, \cos t \sin t\right)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (-2\cos t \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = 1.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

c) La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^3, t^2\right)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(3t^2, 2t\right) \neq (0,0)$, per ogni $t \in (0,1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = t\sqrt{9t^2 + 4}.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4}dt = \left[\frac{1}{27}\left(9t^2 + 4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{(13)^{\frac{3}{2}} - 8}{27}.$$

e) La curva $\gamma : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right)$ è regolare . Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right) \neq (0,0)$ per ogni $t \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^{\frac{1}{4}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}dt = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{61}{216}.$$

2 Esercizi sugli integrali curvilinei

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

2.1 Esercizi sugli integrali curvilinei di I specie

Esercizio 1. Dopo aver verificato che il sostegno delle curve è contenuto nel dominio delle funzioni, calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a) $\displaystyle\int_\gamma x, \qquad \gamma(t) = \left(t, t^2\right), \quad t \in [0, a],\ a > 0$ $\qquad \left[\frac{1}{12}\left[(1+4a)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right]$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \left[\frac{\pi}{4}\right]$

d) $\displaystyle\int_\gamma y^2, \qquad \gamma(t) = \left(t, e^t\right), \quad t \in [0, \log 2]$ $\qquad \left[\frac{5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$

e) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \gamma(t) = (2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t)), \quad t \in [0, 2\pi]$

$\qquad \left[\frac{4}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right]$

g) $\displaystyle\int_\gamma (x+z), \qquad \gamma(t) = \left(t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3\right), \quad t \in [0, 1]$ $\qquad \left[\frac{1}{54}\left(56\sqrt{7} - 1\right)\right]$

h) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}, \qquad \gamma(t) = \left(\cos t, \sin t, t^2\right), \quad t \in [0, \pi]$ $\qquad \left[\frac{1}{12}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right]$

Svolgimento

a) La funzione $f(x, y) = x$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (0, a)$. Inoltre per ogni $t \in [0, a]$ si ha che

$$f(\gamma(t)) = f\left(t, t^2\right) = t, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma x = \int_0^a f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^a t\sqrt{1 + 4t^2}\,dt = \left[\frac{1}{12}\left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{12}\left[(1 + 4a)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

c) La funzione $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \qquad \|\gamma'(t)\| = 1.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{x}{1+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt =$$

posto $z = \sin t$, da cui $dz = \cos t\, dt$, si ottiene

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+z^2}\, dz = \Big[\arctan z\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

d) La funzione $f(x, y) = y^2$ è definita su $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, \log 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, e^t)$, è evidentemente contenuto in $\operatorname{dom}(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (1, e^t) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in (0, \log 2).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, \log 2]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\left(t, e^t\right) = e^{2t}, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma y^2 = \int_0^{\log 2} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\log 2} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(1+e^{2t}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\log 2} = \frac{5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

e) La funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è definita su $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t))$, è evidentemente contenuto in $\operatorname{dom}(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\Big(2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t)\Big) = 2\sqrt{1+t^2}, \qquad \|\gamma'(t)\| = 2t.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 4t\sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

g) La funzione $f(x, y, z) = x + z$ è definita su $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^3$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3\right)$, è evidentemente contenuto in $\operatorname{dom}(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = \left(1, 3\sqrt{2}t, 3t^2\right) \neq (0, 0, 0) \qquad \forall t \in (0, 1).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\left(t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3\right) = t + t^3, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (x+z) = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 \left(t + t^3\right)\sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4}\,dt =$$

posto $z = 18t^2 + 9t^4$, da cui $dz = 36\left(t + t^3\right)dt$, si ottiene

$$= \frac{1}{36}\int_0^{27} \sqrt{1+z}\,dz = \frac{1}{36}\left[\frac{2}{3}(1+z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{27} = \frac{1}{54}\left(56\sqrt{7} - 1\right).$$

h) La funzione $f(x,y,z) = \sqrt{z}$ è definita su $\operatorname{dom}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0\right\}$. La curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ è definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Posto $(x,y,z) = \gamma(t)$, si ha che $z = t^2 \geq 0$ per ogni $t \in [0,\pi]$. Quindi il sostegno di γ, $\operatorname{Im}(\gamma)$, è contenuto in $\operatorname{dom}(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t) \neq (0,0,0) \qquad \forall t \in (0,\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,\pi]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\left(\cos t, \sin t, t^2\right) = t, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sqrt{z} = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{12}\left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^\pi = \frac{1}{12}\left[\left(1 + 4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

2.2 Esercizi sugli integrali curvilinei di II specie

Esercizio 1. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP$ nei seguenti casi:

a) $F(x,y) = (2-y, x),\ \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$ $[-2\pi]$

Svolgimento

a) La funzione $F(x,y) = (2-y, x)$ è continua su $\mathbb{R}^2$. La curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t - \sin t, 1 - \cos t) \cdot (1 - \cos t, \sin t) =$$

$$= (1 + \cos t, t - \sin t) \cdot (1 - \cos t, \sin t) =$$

$$= (1 + \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t)\sin t = t \sin t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} t \sin t\, dt =$$

integrando per parti

$$= \Big[-t \cos t\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = -2\pi.$$

Esercizio 2. Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$ nei seguenti casi:

a) $F(x,y,z) = \dfrac{(2x, 1, 4z)}{x^2 + y + 2z^2 + 1}$, $\quad \gamma(t) = \left(t, t^3, t^2\right)$, $\quad t \in [0,2]$ $\qquad [\log 45]$

b) $F(x,y,z) = \left(2x^2y, zx, -x\right)$, $\quad \gamma(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, -2\sin^2 t\right)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$ $\quad [-3\pi]$

c) $F(x,y,z) = (y, z, x)$, $\quad \gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, b)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$ $\qquad [-\pi a^2]$

d) $F(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$, $\quad \gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$

$[-2\pi a(a + b)]$

Svolgimento

a) La funzione $F(x,y,z) = \dfrac{(2x, 1, 4z)}{x^2 + y + 2z^2 + 1}$ è continua su $\mathbb{R}^3$. La curva $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t, t^3, t^2)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = \left(1, 3t^2, 2t\right) \neq (0,0,0) \qquad \forall t \in (0,2).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,2]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(t, t^3, t^2\right) \cdot \left(1, 3t^2, 2t\right) = \frac{(2t, 1, 4t^2)}{2t^4 + t^3 + t^2 + 1} \cdot \left(1, 3t^2, 2t\right) =$$

$$= \frac{8t^3 + 3t^2 + 2t}{2t^4 + t^3 + t^2 + 1}.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^2 \frac{8t^3 + 3t^2 + 2t}{2t^4 + t^3 + t^2 + 1}\, dt =$$

$$= \left[\log\left(2t^4 + t^3 + t^2 + 1\right)\right]_0^2 = \log 45.$$

b) La funzione $F(x, y, z) = (2x^2y, zx, -x)$ è continua su $\mathbb{R}^3$. La curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, -2\sin^2 t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -4\sin t \cos t) \neq (0, 0, 0) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(1 + \cos t, \sin t, -2\sin^2 t\right) \cdot (-\sin t, \cos t, -4\sin t \cos t) =$$

$$= \left(2(1 + \cos t)^2 \sin t, -2(1 + \cos t)\sin^2 t, -1 - \cos t\right) \cdot (-\sin t, \cos t, -4\sin t \cos t) =$$

$$= -2\sin^2 t - 4\sin^2 t \cos^2 t - 6\sin^2 t \cos t + 4\sin t \cos^2 t + 4\sin t \cos t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \tag{2.1}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t - 4\sin^2 t \cos^2 t - 6\sin^2 t \cos t + 4\sin t \cos^2 t + 4\sin t \cos t\right) dt.$$

Osserviamo che

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \left[\frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)\right]_0^{2\pi} = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(2t - \sin 2t \cos 2t)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t\, dt = \left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t\, dt = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Sostituendo in (2.1) si ottiene

$$\int_\gamma F \cdot dP = -3\pi.$$

c) La funzione $F(x, y, z) = (y, z, x)$ è continua su $\mathbb{R}^3$. La curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, b)$, con $a, b > 0$, è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0) \neq (0, 0, 0) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(a\cos t, a\sin t, b) \cdot (-a\sin t, a\cos t, 0) =$$

$$= (a\sin t, b, a\cos t) \cdot (-a\sin t, a\cos t, 0) = -a^2\sin^2 t + ab\cos t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-a^2\sin^2 t + ab\cos t\right) dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}a^2(t - \sin t\cos t) + \frac{1}{2}ab\sin t\right]_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$