ELEMENTI DI STATISTICA

Vlacci Fabio

Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Università di Firenze
Viale Morgagni 67/A, 50134 - Firenze, Italy, vlacci@math.unifi.it

A.A. 2015-16

Terminologia

- In un *esperimento* ogni risultato delle caratteristiche *osservabili* dell'esperimento si dice *esito*.

Terminologia

- In un *esperimento* ogni risultato delle caratteristiche *osservabili* dell'esperimento si dice *esito*.
- Se un esperimento può essere ripetuto si dice *prova* ogni singola esecuzione dell'esperimento.

Terminologia

- In un *esperimento* ogni risultato delle caratteristiche *osservabili* dell'esperimento si dice *esito*.
- Se un esperimento può essere ripetuto si dice *prova* ogni singola esecuzione dell'esperimento.
- Un *evento* è un insieme di esiti.

Terminologia

- In un *esperimento* ogni risultato delle caratteristiche *osservabili* dell'esperimento si dice *esito*.
- Se un esperimento può essere ripetuto si dice *prova* ogni singola esecuzione dell'esperimento.
- Un *evento* è un insieme di esiti. I singoli esiti sono anche detti *eventi elementari* e, in questo senso, un evento è anche detto *evento composto* (da eventi elementari)).

Terminologia

- In un *esperimento* ogni risultato delle caratteristiche *osservabili* dell'esperimento si dice *esito*.
- Se un esperimento può essere ripetuto si dice *prova* ogni singola esecuzione dell'esperimento.
- Un *evento* è un insieme di esiti. I singoli esiti sono anche detti *eventi elementari* e, in questo senso, un evento è anche detto *evento composto* (da eventi elementari)).
- Un esito o un evento di un esperimento si dicono *casuali* o *aleatori* se non è possibile prevederne il verificarsi a priori in modo certo.
- La totalità degli eventi elementari associati ad un esperimento è lo *spazio campionario* dell'esperimento.

Terminologia

- In un *esperimento* ogni risultato delle caratteristiche *osservabili* dell'esperimento si dice *esito*.
- Se un esperimento può essere ripetuto si dice *prova* ogni singola esecuzione dell'esperimento.
- Un *evento* è un insieme di esiti. I singoli esiti sono anche detti *eventi elementari* e, in questo senso, un evento è anche detto *evento composto* (da eventi elementari)).
- Un esito o un evento di un esperimento si dicono *casuali* o *aleatori* se non è possibile prevederne il verificarsi a priori in modo certo.
- La totalità degli eventi elementari associati ad un esperimento è lo *spazio campionario* dell'esperimento.

evento $\mathcal{A} \rightarrow A \subset S$ spazio campionario

Dati campionari

In genere in una raccolta di dati campionari di una popolazione o *rilevazione campionaria*, oltre agli esiti ovvero alle caratteristiche della popolazione che si intendono registrare, vengono indicati anche le frequenze (relative e/o assolute) per tali dati.

Dati campionari

In genere in una raccolta di dati campionari di una popolazione o *rilevazione campionaria*, oltre agli esiti ovvero alle caratteristiche della popolazione che si intendono registrare, vengono indicati anche le frequenze (relative e/o assolute) per tali dati.

Inoltre *prima* di procedere alla rilevazione campionaria andrebbe appositamente definito una procedura per il *piano di campionamento*

Dati campionari

In genere in una raccolta di dati campionari di una popolazione o *rilevazione campionaria*, oltre agli esiti ovvero alle caratteristiche della popolazione che si intendono registrare, vengono indicati anche le frequenze (relative e/o assolute) per tali dati.

Inoltre *prima* di procedere alla rilevazione campionaria andrebbe appositamente definito una procedura per il *piano di campionamento* Ad esempio, se bisogna campionare un'area territoriale (abbastanza estesa), sarà cura del ricercatore stabilire se (per ragioni pratiche o teoriche) sia meglio seguire uno schema di rilevamento casuale o con geometria regolare (ad esempio uniforme o a grappoli).

Rappresentazione dei dati statistici

Le frequenze ma anche le serie storiche dei dati possono essere visualizzati usando dei diagrammi; in particolare potranno essere usati dei *diagrammi a punti*, dei *diagrammi a linea* o *istogrammi* e degli *areogrammi* come i diagrammi a torta o pie charts.

Rappresentazione dei dati statistici

Le frequenze ma anche le serie storiche dei dati possono essere visualizzati usando dei diagrammi; in particolare potranno essere usati dei *diagrammi a punti*, dei *diagrammi a linea* o *istogrammi* e degli *areogrammi* come i diagrammi a torta o pie charts. Quando il numero di osservazioni è molto grande, è bene considerare una rappresentazione a istogrammi per intervalli o *classi* di valori.

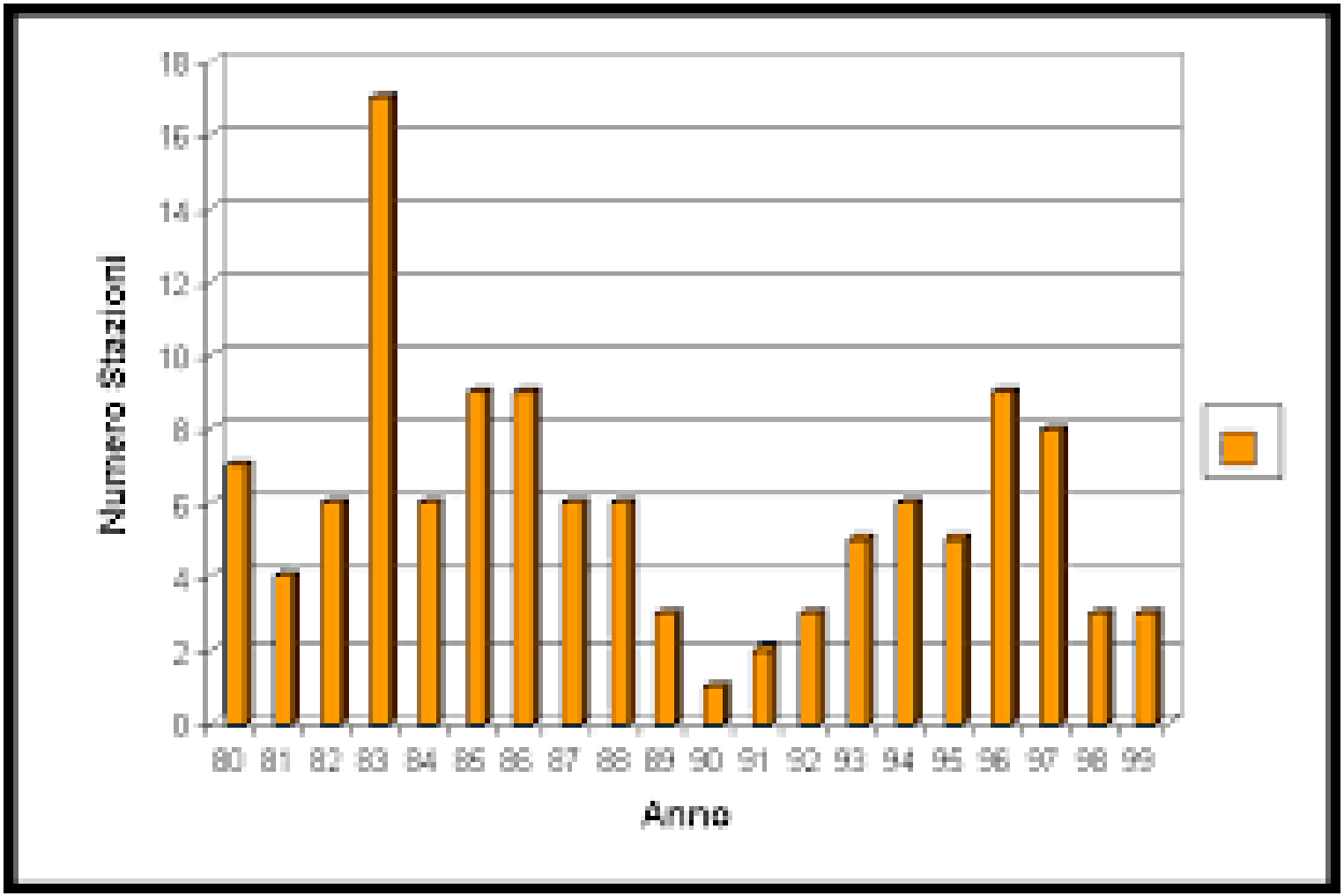
Rappresentazione dei dati statistici

Le frequenze ma anche le serie storiche dei dati possono essere visualizzati usando dei diagrammi; in particolare potranno essere usati dei *diagrammi a punti*, dei *diagrammi a linea* o *istogrammi* e degli *areogrammi* come i diagrammi a torta o pie charts. Quando il numero di osservazioni è molto grande, è bene considerare una rappresentazione a istogrammi per intervalli o *classi* di valori. La scelta del numero di intervalli è una questione delicata ed *influenza* l'aspetto dell'istogramma.

Rappresentazione dei dati statistici

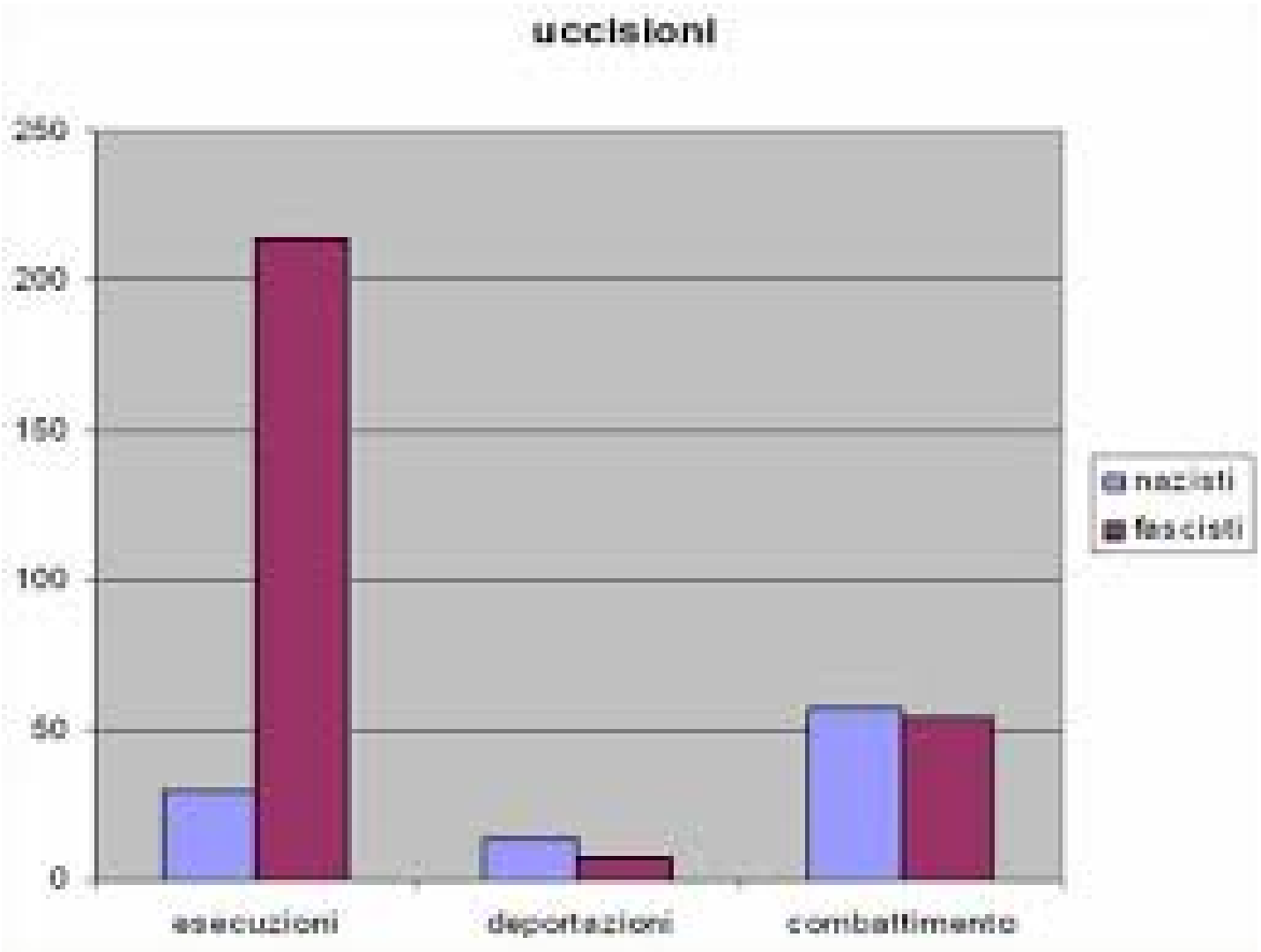
Le frequenze ma anche le serie storiche dei dati possono essere visualizzati usando dei diagrammi; in particolare potranno essere usati dei *diagrammi a punti*, dei *diagrammi a linea* o *istogrammi* e degli *areogrammi* come i diagrammi a torta o pie charts. Quando il numero di osservazioni è molto grande, è bene considerare una rappresentazione a istogrammi per intervalli o *classi* di valori. La scelta del numero di intervalli è una questione delicata ed *influenza* l'aspetto dell'istogramma.
regola (empirica) di Sturges
numero classi $= 1 + 3,322 \log_{10}(n)$ con n numero di osservazioni.

Esempio di Istogramma

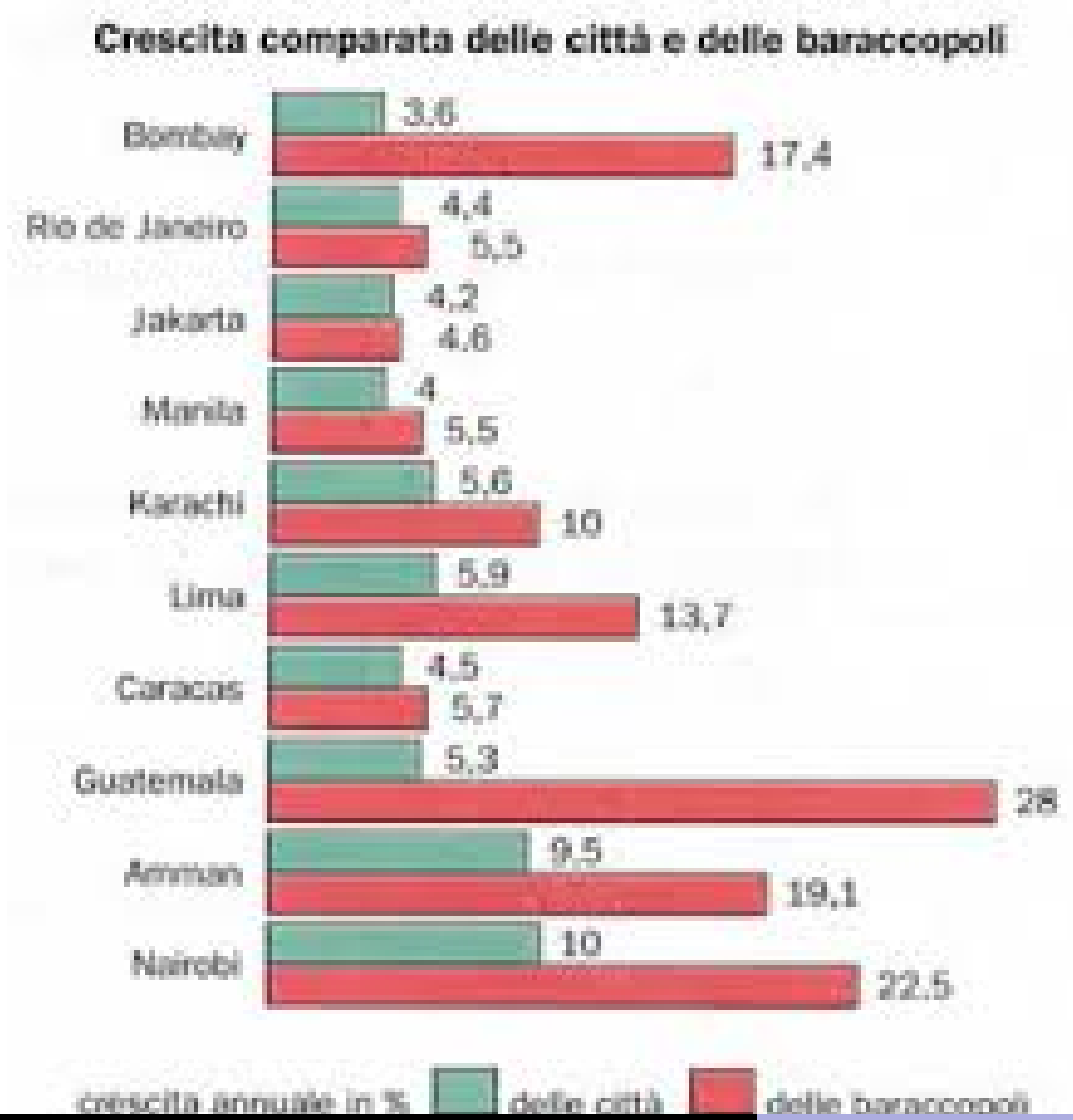


Esempio di Istogramma

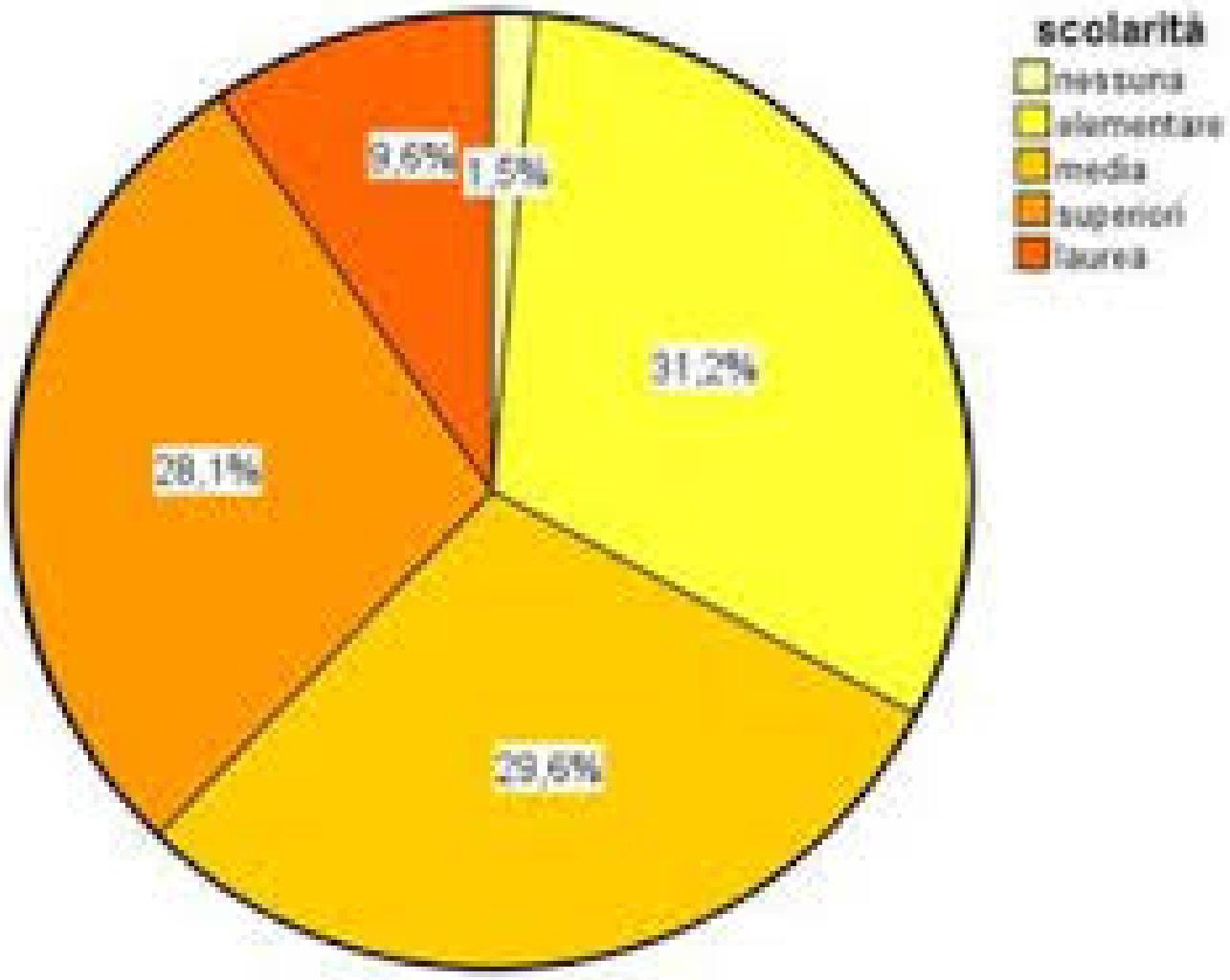
Esempio di Istogramma



Esempio di Istogramma



Pie chart o Diagramma a torta



Indicatori statistici di dati numerici

Per ottenere una descrizione sommaria di un insieme di dati numerici e per confrontare fra loro insiemi diversi di dati numerici campionari è opportuno ricavare dei termini riassuntivi detti *indicatori statistici*.

Indicatori statistici di dati numerici

Per ottenere una descrizione sommaria di un insieme di dati numerici e per confrontare fra loro insiemi diversi di dati numerici campionari è opportuno ricavare dei termini riassuntivi detti *indicatori statistici*.

In particolare tra gli indicatori di *tendenza centrale* si evidenziano

- media campionaria

Indicatori statistici di dati numerici

Per ottenere una descrizione sommaria di un insieme di dati numerici e per confrontare fra loro insiemi diversi di dati numerici campionari è opportuno ricavare dei termini riassuntivi detti *indicatori statistici*.

In particolare tra gli indicatori di *tendenza centrale* si evidenziano

- media campionaria
- mediana

Media campionaria o Media aritmetica dei dati

Se $x_1,\ x_2, , \ldots,\ x_n$ sono i dati numerici rilevati, la media campionaria è il numero

$$\overline{x} := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Media campionaria o Media aritmetica dei dati

Se $x_1,\ x_2, , \ldots,\ x_n$ sono i dati numerici rilevati, la media campionaria è il numero

$$\overline{x} := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

- La media campionaria $\overline{x}$ NON è necessariamente uno dei dati;

Media campionaria o Media aritmetica dei dati

Se $x_1,\ x_2, , \ldots,\ x_n$ sono i dati numerici rilevati, la media campionaria è il numero

$$\overline{x} := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

- La media campionaria $\overline{x}$ NON è necessariamente uno dei dati;
- tuttavia $\min\{x_i\}_{i=1,\ldots,n} \leq \overline{x} \leq \max\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$.
- Esistono anche ALTRE medie (geometrica, armonica, ecc.), ma quella campionaria o aritmetica può essere presa come *baricentro* dei dati.

Osservazione importante

Poichè la somma di numeri reali è commutativa e associativa, allora

$$\overline{x} := \frac{\overbrace{x_1 + \ldots + x_1}^{n_1}}{n} + \frac{\overbrace{x_2 + \ldots + x_2}^{n_2}}{n} + + \cdots + \frac{\overbrace{x_n + \ldots + x_n}^{n_n}}{n}$$

con $n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$.

Osservazione importante

Poichè la somma di numeri reali è commutativa e associativa, allora

$$\overline{x} := \frac{\overbrace{x_1 + \ldots + x_1}^{n_1}}{n} + \frac{\overbrace{x_2 + \ldots + x_2}^{n_2}}{n} + + \cdots + \frac{\overbrace{x_n + \ldots + x_n}^{n_n}}{n}$$

con $n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$.
Si noti che

$$\overline{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

ove $p_j = \frac{n_j}{n}$ è la frequenza relativa di x_j.

Media geometrica

Supponiamo che i dati campionari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano tutti numeri positivi.

Media geometrica

Supponiamo che i dati campionari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano tutti numeri positivi. Allora la loro *media geometrica* è data da

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$$

Media geometrica

Supponiamo che i dati campionari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano tutti numeri positivi. Allora la loro *media geometrica* è data da

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$$

Si noti questo **importante** legame fra media geometrica e media aritmetica.

$$\log(M_g) = \log \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \log(x_j)}{n}$$

Mediana

Un altro indicatore statistico di tendenza centrale è la *mediana campionaria*.

Mediana

Un altro indicatore statistico di tendenza centrale è la *mediana campionaria*.
Esso è il valore che divide in due parti uguali i dati, quando questi sono ordinati in senso crescente o decrescente.

Mediana

Un altro indicatore statistico di tendenza centrale è la *mediana campionaria*.
Esso è il valore che divide in due parti uguali i dati, quando questi sono ordinati in senso crescente o decrescente. Più precisamente, se il numero n dei dati è dispari, allora il valore della mediana è dato dal dato (detto *mediano*) di posizione $(n+1)/2$ nell'elenco ordinato di dati. Se invece n è dispari vi saranno due dati mediani (quello di posizione $n/2$ e il successivo) e allora andrà considerata come mediana la media capionaria dei due dati mediani.

Quartili e percentili

Se il numero di osservazioni/dati è elevato, può essere utile suddividere ulteriormente l'insieme dei dati procedendo al calcolo della mediana della prima e della seconda metà dei dati una volta ordinati in senso crescente o decrescente.

Quartili e percentili

Se il numero di osservazioni/dati è elevato, può essere utile suddividere ulteriormente l'insieme dei dati procedendo al calcolo della mediana della prima e della seconda metà dei dati una volta ordinati in senso crescente o decrescente.
In questo modo i dati sono suddivisi in 4 classi dette *quartili*.

Quartili e percentili

Se il numero di osservazioni/dati è elevato, può essere utile suddividere ulteriormente l'insieme dei dati procedendo al calcolo della mediana della prima e della seconda metà dei dati una volta ordinati in senso crescente o decrescente.
In questo modo i dati sono suddivisi in 4 classi dette *quartili*.
In generale, se i dati possono essere divisi in 100 classi, dette *percentili*, il primo quartile corrisponde al 25-simo percentile mentre il 50-esimo percentile coincide con la mediana o secondo quartile.

Quartili e percentili

Se il numero di osservazioni/dati è elevato, può essere utile suddividere ulteriormente l'insieme dei dati procedendo al calcolo della mediana della prima e della seconda metà dei dati una volta ordinati in senso crescente o decrescente.
In questo modo i dati sono suddivisi in 4 classi dette *quartili*.
In generale, se i dati possono essere divisi in 100 classi, dette *percentili*, il primo quartile corrisponde al 25-simo percentile mentre il 50-esimo percentile coincide con la mediana o secondo quartile.
Per un valore p ($0 \leq p \leq 100$) si parla di p-esimo percentile.

Moda

La *moda campionaria* (detta anche *valore normale* o *norma*) è il dato (o i dati) che si presenta(no) con frequenza massima.

Moda

La *moda campionaria* (detta anche *valore normale* o *norma*) è il dato (o i dati) che si presenta(no) con frequenza massima. Di conseguenza si parla di *distribuzione dei dati* di tipo *unimodale* o *bimodale* e in generale *plurimodale*.

Moda

La *moda campionaria* (detta anche *valore normale* o *norma*) è il dato (o i dati) che si presenta(no) con frequenza massima. Di conseguenza si parla di *distribuzione dei dati* di tipo *unimodale* o *bimodale* e in generale *plurimodale*.
La moda è di facile identificazione in un istogramma;

Moda

La *moda campionaria* (detta anche *valore normale* o *norma*) è il dato (o i dati) che si presenta(no) con frequenza massima. Di conseguenza si parla di *distribuzione dei dati* di tipo *unimodale* o *bimodale* e in generale *plurimodale*.
La moda è di facile identificazione in un istogramma; se i dati sono raggruppati in classi, allora la classe con massima frequenza è detta *classe modale*.

Indicatore di dispersione dei dati

Se la media campionaria $\overline{x}$ ha il ruolo di *baricentro* dei dati $\{x_1, \ldots, x_n\}$, allora la dispersione dei dati x_j da $\overline{x}$ può essere calcolata considerando gli *scarti*

$$d_i := x_i - \overline{x}$$

oppure

$$|d_i| = |x_i - \overline{x}| \geq 0.$$

Indicatore di dispersione dei dati

Se la media campionaria $\overline{x}$ ha il ruolo di *baricentro* dei dati $\{x_1, \ldots, x_n\}$, allora la dispersione dei dati x_j da $\overline{x}$ può essere calcolata considerando gli *scarti*

$$d_i := x_i - \overline{x}$$

oppure

$$|d_i| = |x_i - \overline{x}| \geq 0.$$

Tuttavia, risulta

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$$

Indicatore di dispersione dei dati

Se la media campionaria $\overline{x}$ ha il ruolo di *baricentro* dei dati $\{x_1, \ldots, x_n\}$, allora la dispersione dei dati x_j da $\overline{x}$ può essere calcolata considerando gli *scarti*

$$d_i := x_i - \overline{x}$$

oppure

$$|d_i| = |x_i - \overline{x}| \geq 0.$$

Tuttavia, risulta

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$$

in quanto

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = n\overline{x} - n\overline{x} = 0.$$

Varianza campionaria o stimata dei dati

Si dice *varianza campionaria* o *varianza stimata* dei dati $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di media campionaria $\overline{x}$ il numero (non negativo)

$$s^2 := \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{n-1}$$

Varianza campionaria o stimata dei dati

Si dice *varianza campionaria* o *varianza stimata* dei dati $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di media campionaria $\overline{x}$ il numero (non negativo)

$$s^2 := \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{n-1}$$

Si dice infine che

$$s := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

è la *deviazione standard stimata* o *scarto quadratico medio stimato* dei dati $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Alcune osservazioni

Si parla di *Varianza* (Var) e *Scarto quadratico* o *Deviazione standard* (σ) se nelle formule precedenti si considera n invece di $n-1$, vale a dire

$$Var := \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{Var}$$

Alcune osservazioni

Si parla di *Varianza* (Var) e *Scarto quadratico* o *Deviazione standard* (σ) se nelle formule precedenti si considera n invece di $n-1$, vale a dire

$$Var := \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{Var}$$

La differenza fra la varianza e la varianza campionaria o stimata (e quindi fra la deviazione standard e quella stimata) risulta rilevante solo per n piccoli; per n grandi tali differenze sono trascurabili.

Alcune osservazioni

Si parla di *Varianza* (Var) e *Scarto quadratico* o *Deviazione standard* (σ) se nelle formule precedenti si considera n invece di $n-1$, vale a dire

$$Var := \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{Var}$$

La differenza fra la varianza e la varianza campionaria o stimata (e quindi fra la deviazione standard e quella stimata) risulta rilevante solo per n piccoli; per n grandi tali differenze sono trascurabili.
Si osservi inoltre che la deviazione standard e la deviazione standard stimata hanno la stessa unità di misura dei dati.

Una formula alternativa....

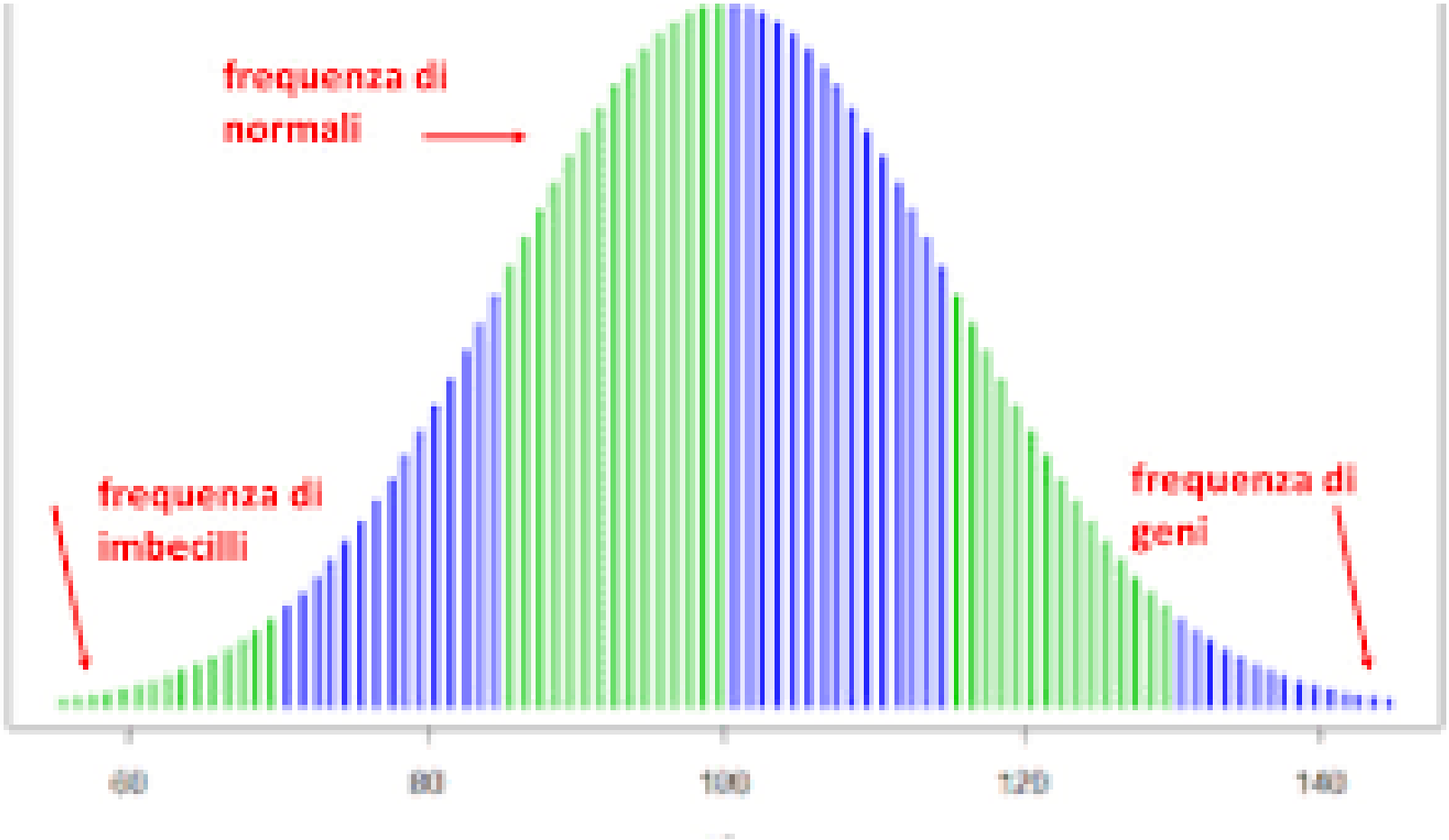
Da $(x_i - \overline{x})^2 = x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2$ e dal fatto che $n\overline{x} = x_1 + \ldots + x_n$ si ricava anche

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$$

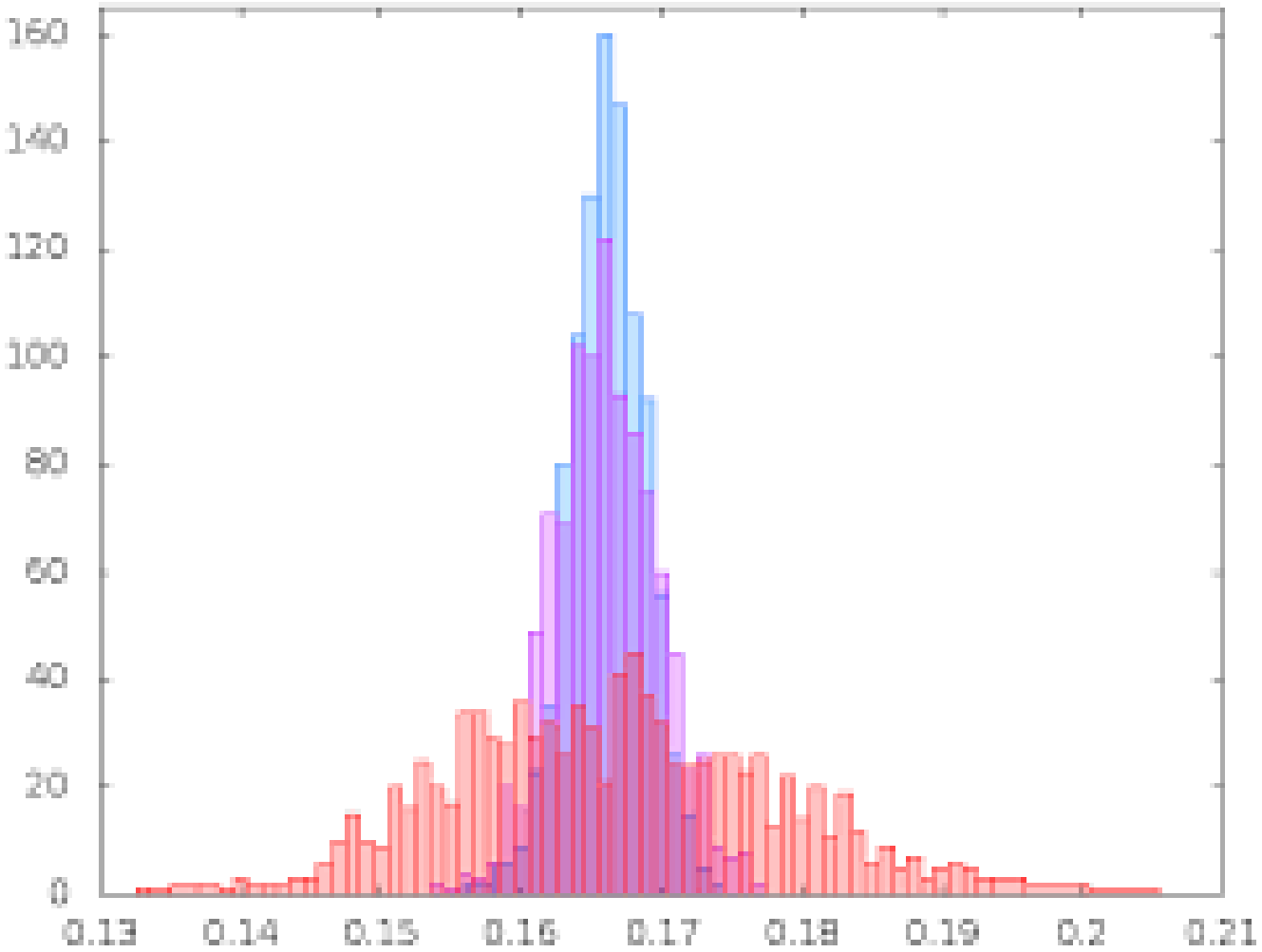
Dati relativi a grandezze continue

Se volessimo rappresentare in forma di istogramma di frequenze un insieme di misure di una grandezza che può variare con continuità, allora, procedendo con la suddivisione dell'intero intervallo di misure in un numero finito n di intervallini della medesima ampiezza, verremmo a ottenere un istogramma in cui l'area di ciascun rettangolino verticale risulti proporzionale al numero di misure che cadono nella base dell'intervallo considerato.

Esempio di istogramma di frequenza di dati relativi a grandezza che può variare con continuità



Esempio di istogramma di frequenza di dati relativi a grandezza che può variare con continuità



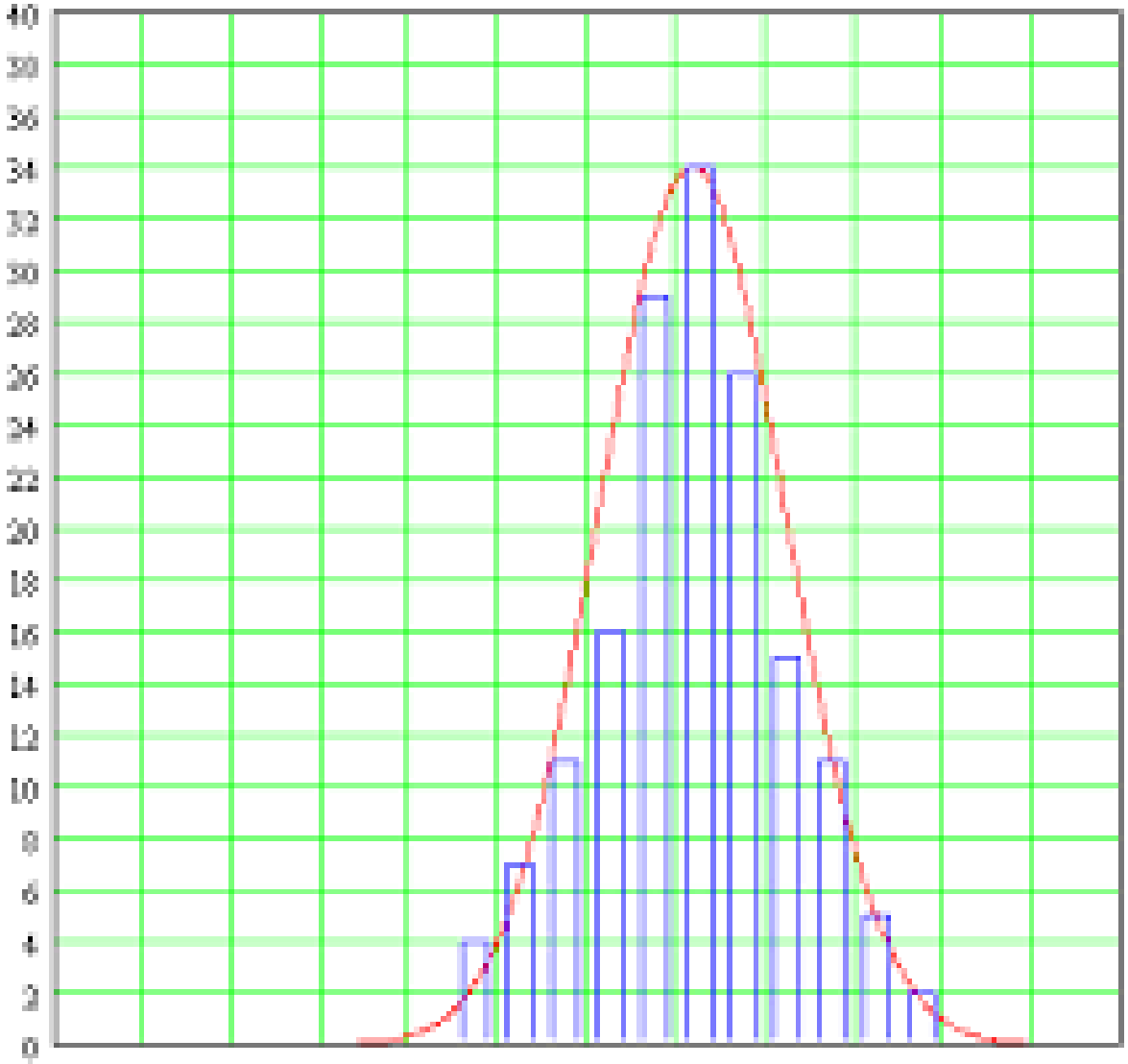
Dati relativi a grandezze continue

Se inoltre si fa l'ipotesi che la numerosità del campione sia molto grande, allora i rettangolini dell'istogramma di frequanza diventeranno sempre più sottili e l'istogramma stesso sarà assimilabile ad una curva continua detta *curva di distribuzione delle frequenze*.

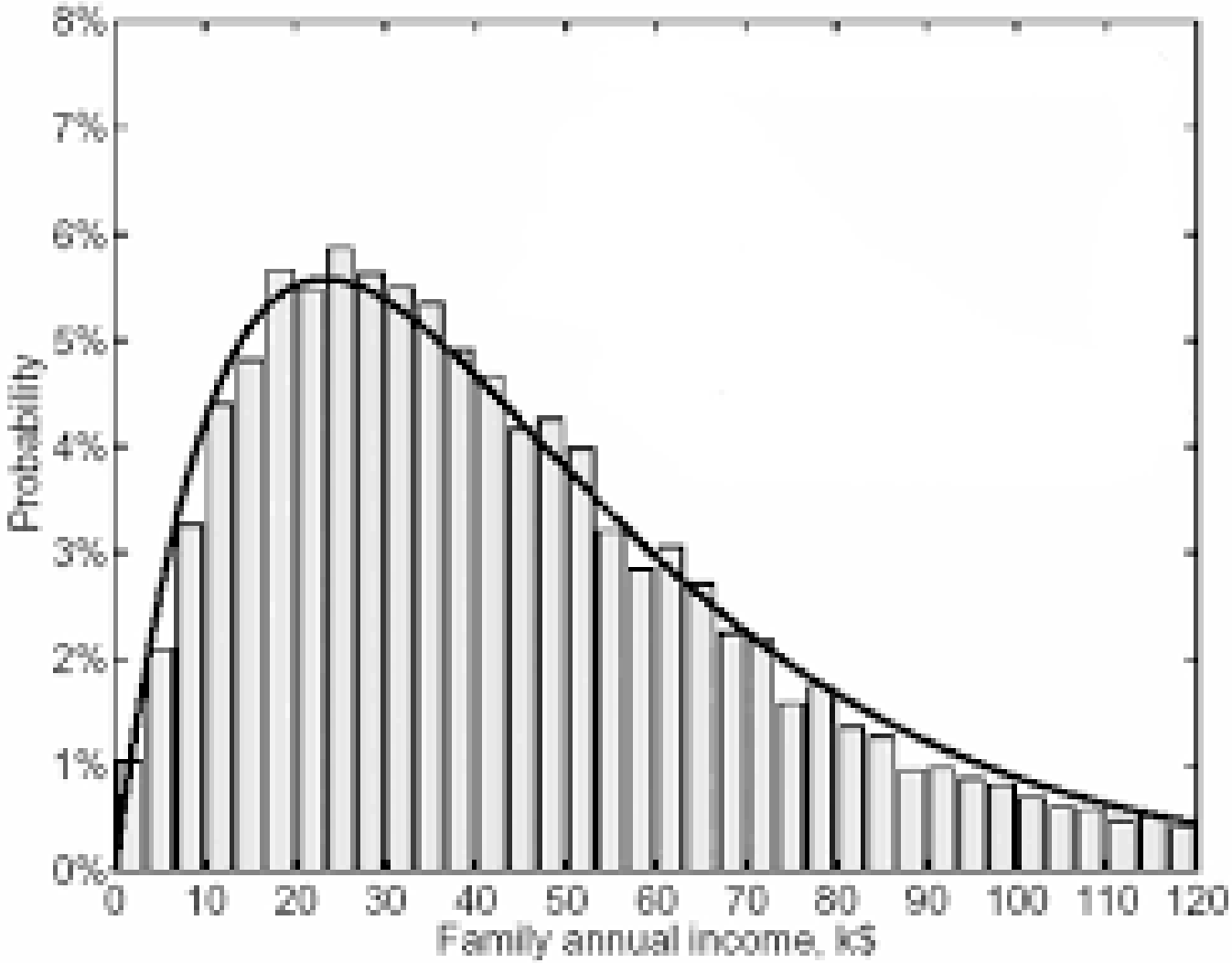
Dati relativi a grandezze continue

Se inoltre si fa l'ipotesi che la numerosità del campione sia molto grande, allora i rettangolini dell'istogramma di frequanza diventeranno sempre più sottili e l'istogramma stesso sarà assimilabile ad una curva continua detta *curva di distribuzione delle frequenze*.
In genere, come per gli istogrammi "discreti", si suppone (ovvero si fa in modo) che l'area complessiva del sottografico di una curva di distribuzione di frequenze sia uguale a 1.

Esempio di istogramma con curva di distribuzione di frequenze



Esempio di istogramma con curva di distribuzione di frequenze



Distribuzione Normale o Gaussiana

Spesso la curva di distribuzione di frequenza è il grafico di una funzione (dipendente dai parametri reali A, B e C)

$$f(x) = Ae^{-B(x-C)^2}$$

e in questi casi si dice che la distribuzione è *Normale* o *Gaussiana*.

Distribuzione Normale o Gaussiana

Spesso la curva di distribuzione di frequenza è il grafico di una funzione (dipendente dai parametri reali A, B e C)

$$f(x) = Ae^{-B(x-C)^2}$$

e in questi casi si dice che la distribuzione è *Normale* o *Gaussiana*.

Vi sono ragioni empiriche ma anche teoriche per stabilire o prevedere che certi dati si distribuiscano seguendo una curva di tipo gaussiano.

Distribuzione Normale o Gaussiana

Spesso la curva di distribuzione di frequenza è il grafico di una funzione (dipendente dai parametri reali A, B e C)

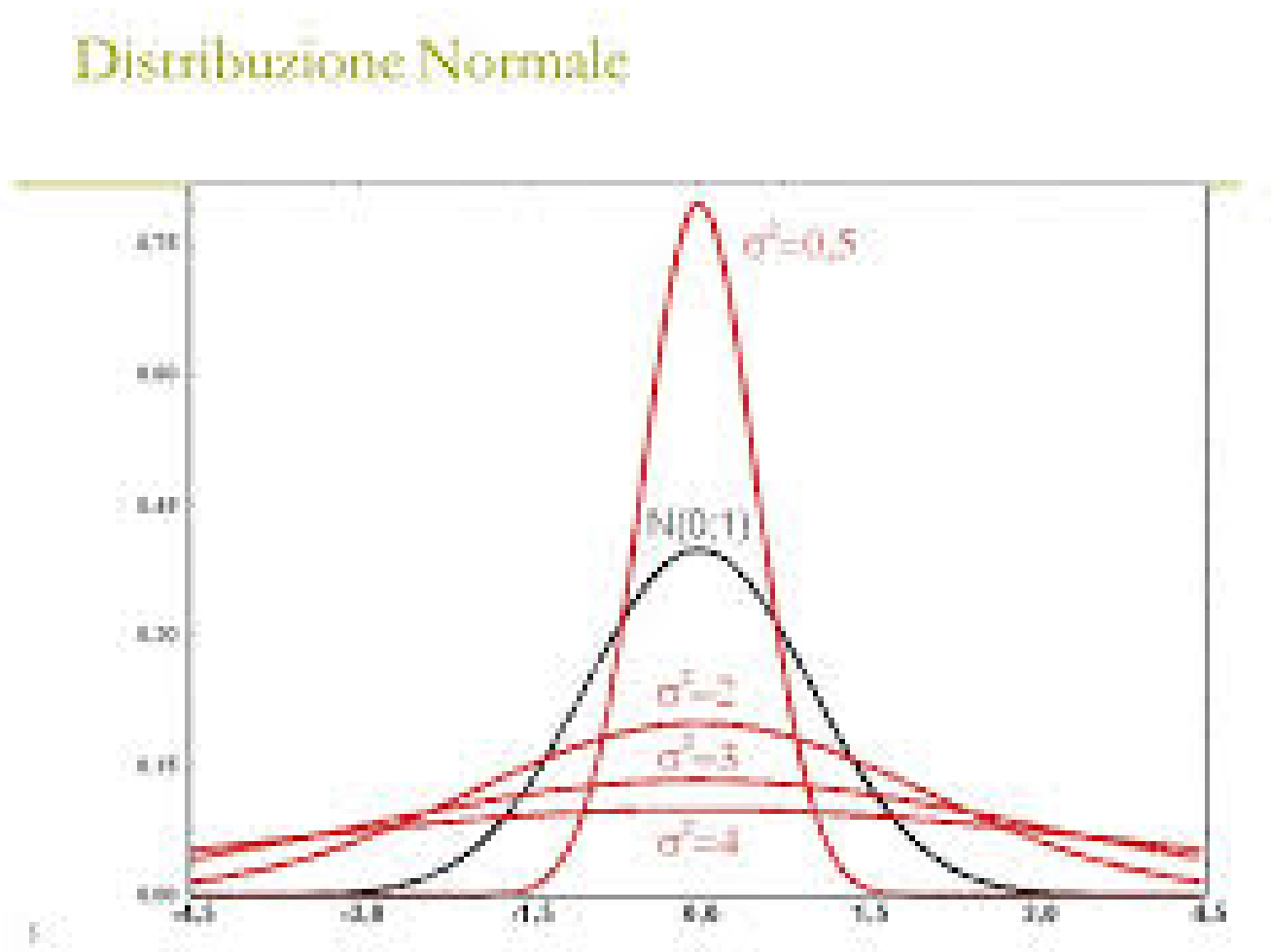
$$f(x) = Ae^{-B(x-C)^2}$$

e in questi casi si dice che la distribuzione è *Normale* o *Gaussiana*.

Vi sono ragioni empiriche ma anche teoriche per stabilire o prevedere che certi dati si distribuiscano seguendo una curva di tipo gaussiano.

In linea di principio questo accertamento richiederebbe degli specifici *test statistici*; a livello pratico, sfruttando il fondamentale **Teorema Limite Centrale** o **Teorema Centrale del Limite**, se si considerano medie campionarie di dati (numerosi) relativi ad una grandezza continua, allora queste tendono a disporsi seguendo una distribuzione normale o gaussiana.

Esempio di gaussiane



Distribuzione Normale o Gaussiana

Se quindi si sa che una distribuzione di dati di media aritmetica μ e scarto quadratico medio σ è di tipo gaussiano allora nell'espressione

$$f(x) = Ae^{-B(x-C)^2}$$

si pone

$$A := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad B := \frac{1}{2\sigma^2} \quad C := \mu$$

Distribuzione Normale o Gaussiana

In questo modo la funzione distribuzione di frequenza diventa

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuzione Normale o Gaussiana

In questo modo la funzione distribuzione di frequenza diventa

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La curva associata a tale distribuzione di frequenze è una curva a campana più o meno ripida a seconda del valore di σ, simmetrica rispetto a $x = \mu$ (che è anche un punto di massimo assoluto) e ha l'ulteriore proprietà che l'area del sottografico vale 1, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = 1$$

Distribuzione Normale o Gaussiana Standardizzata

Si dice distribuzione Normale o Gaussiana *Standardizzata* quella distribuzione per cui $\mu = 0$ e $\sigma = 1$; con tale scelta l'espressione della relativa distribuzione di frequenze diventa (più semplicemente)

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Proprietà della Distribuzione Normale o Gaussiana

Quale che siano i valori di μ e σ della gaussiana considerata, nell'intervallo

- $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ si trova circa il 68% delle misure, ossia

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \simeq 0.68$$

Proprietà della Distribuzione Normale o Gaussiana

Quale che siano i valori di μ e σ della gaussiana considerata, nell'intervallo

- $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ si trova circa il 68% delle misure, ossia

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \simeq 0.68$$

- $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ si trova circa il 95% delle misure, ossia

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \simeq 0.95$$

Proprietà della Distribuzione Normale o Gaussiana

Quale che siano i valori di μ e σ della gaussiana considerata, nell'intervallo

- $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ si trova circa il 68% delle misure, ossia

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \simeq 0.68$$

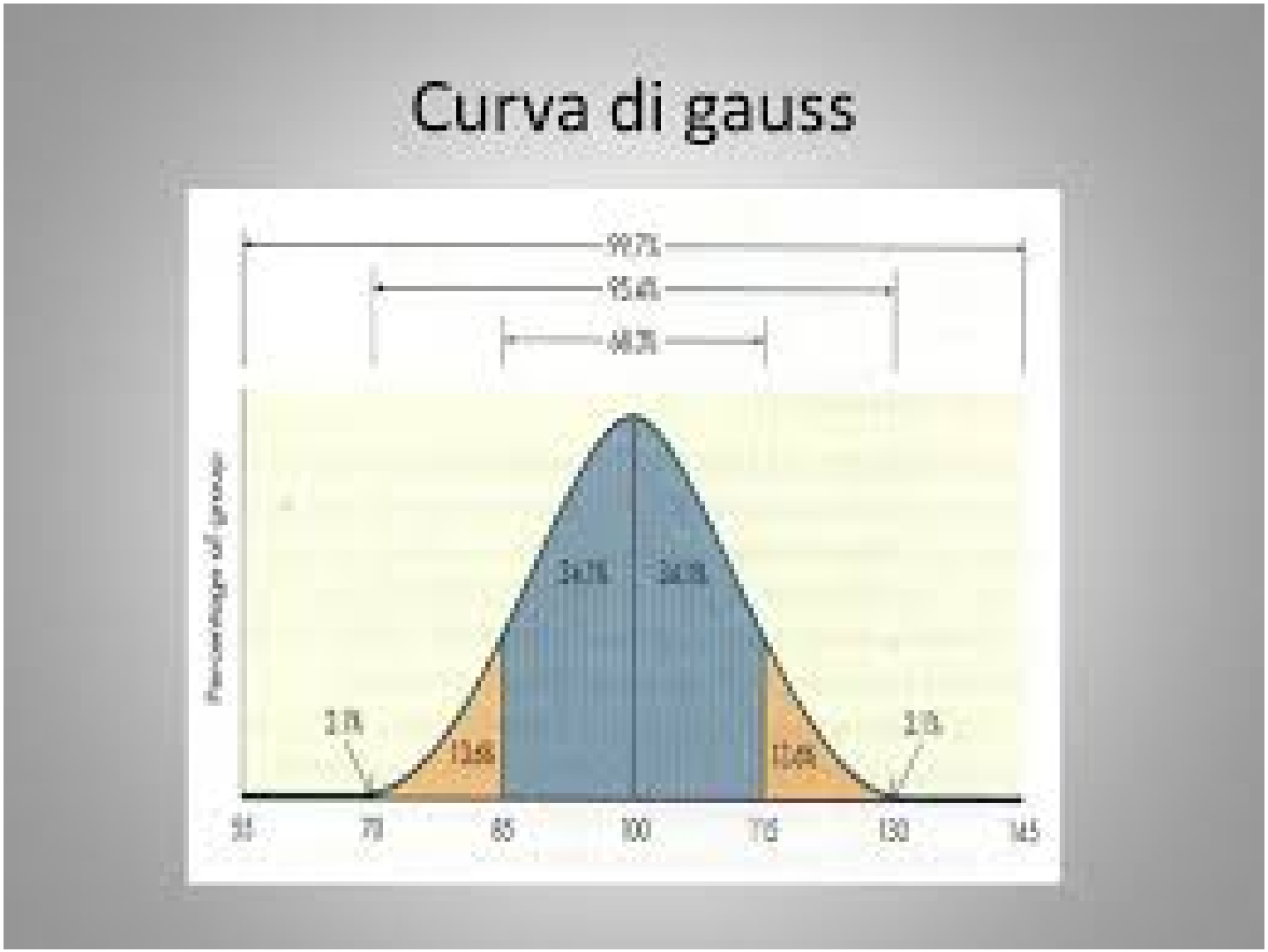
- $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ si trova circa il 95% delle misure, ossia

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \simeq 0.95$$

- $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ si trova circa il 99.7% delle misure, ossia

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \simeq 0.997$$

Esempio di gaussiane



Proprietà di distribuzioni Gaussiane

Se una grandezza x segue una distribuzione Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ di media μ e scarto quadratico medio σ, risulta che

- posto $z =: \frac{x - \mu}{\sigma}$, la distribuzione associata è Normale standard (ossia di media 0 e varianza/scarto quadratico medio 1)

Proprietà di distribuzioni Gaussiane

Se una grandezza x segue una distribuzione Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ di media μ e scarto quadratico medio σ, risulta che

- posto $z =: \frac{x - \mu}{\sigma}$, la distribuzione associata è Normale standard (ossia di media 0 e varianza/scarto quadratico medio 1)
- La somma di distribuzioni Normali (indipendenti) è Normale di media la somma delle medie (e di varianza la somma delle varianze)

Variabili casuali o aleatorie

Più in generale, si dice che X è una *variabile aleatoria* o *casuale* se è una grandezza associata ad una distribuzione di frequenze. Se X e Y sono due variabili aleatorie, allora $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$ con

$$Cov(X, Y) = \sum_j p_j(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

Variabili casuali o aleatorie

Più in generale, si dice che X è una *variabile aleatoria* o *casuale* se è una grandezza associata ad una distribuzione di frequenze. Se X e Y sono due variabili aleatorie, allora $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$ con

$$Cov(X,Y) = \sum_j p_j(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

Si noti che

- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

Variabili casuali o aleatorie

Più in generale, si dice che X è una *variabile aleatoria* o *casuale* se è una grandezza associata ad una distribuzione di frequenze. Se X e Y sono due variabili aleatorie, allora $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$ con

$$Cov(X,Y) = \sum_j p_j(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

Si noti che

- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(X,X) = Var(X)$

Variabili casuali o aleatorie

Più in generale, si dice che X è una *variabile aleatoria* o *casuale* se è una grandezza associata ad una distribuzione di frequenze. Se X e Y sono due variabili aleatorie, allora $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$ con

$$Cov(X,Y) = \sum_j p_j(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

Si noti che

- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(X,X) = Var(X)$
- $-\sigma_x\sigma_y \leq Cov(X,Y) \leq \sigma_X\sigma_y$

Coefficiente di correlazione

Posto

$$\varrho_{X,Y} := \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_y}$$

esso si dice *coefficiente di correlazione di X e Y*.

Coefficiente di correlazione

Posto

$$\varrho_{X,Y} := \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_y}$$

esso si dice *coefficiente di correlazione di X e Y*. Chiaramente

$$-1 \leq \varrho_{X,Y} \leq 1$$

Intervalli di confidenza

Note le misure di una certa grandezza effettuate su un campione di n indiviidui di una popolazione, nasce il problema di stabilire entro quali limiti tale grandezza possa essere approssimata da una distribuzione nota in modo da dedurre o inferire dai dati ìl'andamento della grandezza per l'intera popolazione.

Intervalli di confidenza

Note le misure di una certa grandezza effettuate su un campione di *n* indiviidui di una popolazione, nasce il problema di stabilire entro quali limiti tale grandezza possa essere approssimata da una distribuzione nota in modo da dedurre o inferire dai dati ìl'andamento della grandezza per l'intera popolazione.

Questo problema é alla base della Statistica *Inferenziale*.

Intervalli di confidenza

Ci limiteremo a considerare con quale approssimazione si stima la media μ della grandezza a partire dalla media campionaria $\overline{x}$.

Intervalli di confidenza

Ci limiteremo a considerare con quale approssimazione si stima la media μ della grandezza a partire dalla media campionaria $\overline{x}$. Ebbene, facendo ricorso alla nozione di *errore standard della media* definito come

$$e.s.m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(con s scarto quadratico medio stimato dei dati), si prova che nell'intervallo

- $[\overline{x} - e.s.m, \overline{x} + e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 68% di trovare la media μ

Intervalli di confidenza

Ci limiteremo a considerare con quale approssimazione si stima la media μ della grandezza a partire dalla media campionaria $\overline{x}$. Ebbene, facendo ricorso alla nozione di *errore standard della media* definito come

$$e.s.m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(con s scarto quadratico medio stimato dei dati), si prova che nell'intervallo

- $[\overline{x} - e.s.m, \overline{x} + e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 68% di trovare la media μ
- $[\overline{x} - 2e.s.m, \overline{x} + 2e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 95% di trovare la media μ

Intervalli di confidenza

Ci limiteremo a considerare con quale approssimazione si stima la media μ della grandezza a partire dalla media campionaria $\overline{x}$. Ebbene, facendo ricorso alla nozione di *errore standard della media* definito come

$$e.s.m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(con s scarto quadratico medio stimato dei dati), si prova che nell'intervallo

- $[\overline{x} - e.s.m, \overline{x} + e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 68% di trovare la media μ
- $[\overline{x} - 2e.s.m, \overline{x} + 2e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 95% di trovare la media μ
- $[\overline{x} - 3e.s.m, \overline{x} + 3e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 99.7% di trovare la media μ

Intervalli di confidenza

Ci limiteremo a considerare con quale approssimazione si stima la media μ della grandezza a partire dalla media campionaria $\overline{x}$. Ebbene, facendo ricorso alla nozione di *errore standard della media* definito come

$$e.s.m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(con s scarto quadratico medio stimato dei dati), si prova che nell'intervallo

- $[\overline{x} - e.s.m, \overline{x} + e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 68% di trovare la media μ
- $[\overline{x} - 2e.s.m, \overline{x} + 2e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 95% di trovare la media μ
- $[\overline{x} - 3e.s.m, \overline{x} + 3e.s.m]$ si ha una probabilità di circa il 99.7% di trovare la media μ

Gli intervalli di questo tipo si dicono *intervalli di confidenza* per la media.

Cenni su Test Statistici

Supponiamo che uno sperimentatore voglia studiare una grandezza che reputa di distribuzione Normale in una popolazione. Se la media teorica μ della distribuzione è ignota ma nota la varianza σ^2 (per esempio ciò accade se si ritiene che la dispersione dei dati dipenda SOLO dalla precisione dello strumento di rilevazione), allora detta X_j la j–esima misurazione (pensata come una variabile aleatoria) si considera la nuova variabile aleatoria

$$M_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

che si prova avere media μ e varianza σ^2/n; pertanto si introduce il consuntivo statistico

$$\frac{(M_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$$

che segue una distribuzione Normale standard.

Cenni su Test Statistici

A questo punto si fa l'ipotesi che il valore μ_0 sia il valore della media e si considera l'accuratezza di questa ipotesi stabilendo entro una certa precisione (detta *significatività*) che il consuntivo si trovi nell'intervallo $[-u, u]$.

Cenni su Test Statistici

A questo punto si fa l'ipotesi che il valore μ_0 sia il valore della media e si considera l'accuratezza di questa ipotesi stabilendo entro una certa precisione (detta *significatività*) che il consuntivo si trovi nell'intervallo $[-u, u]$. In pratica si fissa la precisione $1 - \varepsilon$ e si stabilisce (usando le Tavole della Normale Standard) l'intervallo in modo che

$$\int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \varepsilon;$$

se il consuntivo statistico rilevato si trova in tale intervallo, si accetta l'ipotesi per μ_0 possa ritenersi un valore *accettabile* per la media μ con una significatività $1 - \varepsilon$; altrimenti si rifiuta l'ipotesi fatta.

Cenni su Test Statistici

Si vengono dunque a determinare due intervalli (in genere due regini) dette di accetttazione e di rifiuto che dipendono dalla numerosità campionaria (dato oggettivo) e dalla scelta del valore della significatività (dato soggettivo) del test statistico.

Cenni su Test Statistici

Si vengono dunque a determinare due intervalli (in genere due regini) dette di accetttazione e di rifiuto che dipendono dalla numerosità campionaria (dato oggettivo) e dalla scelta del valore della significatività (dato soggettivo) del test statistico. Inoltre se la varianza della grandezza non è nota (ma solo quella campionaria), allora l'intervallo di accetttazione va ricercato studiando la distribuzione *t* di Student (che è assimilabile alla Normale per $n \geq 30$). Altri test si interessano al caso di più popolazioni (test di Fisher) o al confronto di consuntivi statistici (test di adeguamento del χ^2) o sulla loro indipendenza (test di indipendenza del χ^2).

Referenze bibliografiche

Capitolo 1 del testo
Metodi Matematici e Statistici nelle Scienze della Terra
Volume terzo: Tecniche statistiche
A. Buccianti, F. Rosso, F. Vlacci
Liguori Editore 2003

Capitolo 10 del testo
Matematica. Comprendere e interpretare fenomeni delle scienze della vita
V Edizione
G. Gentili, V. Villani
McGraw Hill 2012

Metodi Matematici e Statistici per le Scienze Applicate
G. Prodi
McGraw Hill 1992