Meccanica Classica

STATO del sistema $\longleftrightarrow$ valore di un set di variabili dinamiche

$\updownarrow$

Pto $(\bar{p}, \bar{q})$ nello spazio delle fasi

Evoluzione temporale:
moto nello spazio degli stati (fasi)
descritto da $(\bar{p}(t), \bar{q}(t))$
Eq. della dinamica

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

permette di predire la posizione della particella (e il valore di ogni altra variabile dinamica)

Meccanica Quantistica:

STATO del sistema $\longleftrightarrow$ distribuzione statistica dei risultati di misura delle variabili dinamiche

$\updownarrow$

FUNZIONE D'ONDA $\psi(\bar{x})$

Evoluzione temporale:
moto nello spazio degli stati
descritto da $\psi(\bar{x}, t)$
Eq. della dinamica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{x}) \right] \psi(\bar{x}, t)$$

permette di predire la probab. di misurare la particella nella posizione x: $|\psi(\bar{x})|^2$

$\psi(\bar{x})$ funzione a valori complessi
$\downarrow$
STATO
del SISTEMA

$\psi(\bar{x})$ ci da informazioni sulla distribut. statistica della variabile dinamica X

Restringiamoci per semplicità a una particella che vive in 1 dimensione, il cui stato è descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$.

La probabilità che la particella si trovi nell' intervallo Δ è data da

$$P(x \in \Delta) = \int_\Delta dx \; \underbrace{k|\psi(x)|^2}_{\text{densità di probabilità}} \qquad k \in \mathbb{C}$$

k è t.c. la probabilità di trovare la particella in qualsiasi valore di x è uguale a 1:

$$\underbrace{k\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\psi(x)|^2 = 1}_{\psi \in L^2(\mathbb{R})} \Rightarrow k^{-1} = \int_{\mathbb{R}} dx \, |\psi(x)|^2 \equiv \|\psi\|^2$$

Affinché ψ rappresenti uno stato ψ dev'essere L^2

- Densità di probab. è $\dfrac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|^2}$

Se ψ è t.c. $\|\psi\|^2 = 1$, allora ψ si dice funz. d'onda NORMALIZZATA

$\psi \in L^2$. Inoltre vogliamo che ψ si comporti come l'AMPIEZZA di un'onda, cioè che valga il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE, cioè combin. lin. di funzioni d'onda devi essere una funz. d'onda $\rightsquigarrow$ ψ deve appartenere a uno SPAZIO VETTORIALE

$\rightsquigarrow$ In effetti qto avviene, perché $L^2(\mathbb{R})$ è uno sp. vettoriale.

$L^2(\mathbb{R})$ è uno SPAZIO DI HILBERT : sp. vett. (a dim. ∞) con un prodotto scalare hermitiano

$$(\psi, \phi) = \int dx\, \psi^*(x)\, \phi(x) = (\phi, \psi)^* \qquad \psi, \phi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$$

Prodotto scalare permette di def. una norma:

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int dx\, \psi^*(x)\, \psi(x) = \int dx\, |\psi(x)|^2$$