4.7 Punti singolari di una conica

Esempio 4.7.1. Vogliamo determinare la retta tangente (se esiste) alla conica degenere $C: (x+y)(x-y)=0$ nel suo punto $(1,1)$. Proviamo a utilizzare la formula (4.25). Poiché

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(1,1)}=2, \quad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(1,1)}=-2$$

si ottiene la retta

$$2(x-1)-2(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-y=0$$

che è proprio la retta, componente di C, cui appartiene il punto in questione. Si vede che, per ogni punto $P \neq O$ appartenente alla retta $x-y=0$, la formula (4.25) fornisce la retta stessa; lo stesso accade per i punti della retta $x+y=0$ diversi dall'origine.
Se invece si applica tale formula nel punto $O=(0,0)$ (che è il punto di intersezione delle due rette componenti di C), si vede che entrambe le derivate parziali si annullano; dunque bisogna procedere al calcolo in modo alternativo. Ad esempio, si consideri la generica retta per l'origine $(x,y)=\lambda(m,n)$ e si intersechi con C: si ottiene l'equazione

$$\lambda^2(m^2-n^2)=0.$$

Quindi quasi ogni retta per O interseca C con molteplicità due. Si noti che per $[m,n]=[1,\pm 1]$, le rette corrispondenti (cioè le componenti della conica) intersecano C con molteplicità di intersezione "infinita". Ciò accade (con un calcolo analogo) per ogni punto $P \neq O$ della conica: la molteplicità di intersezione tra C e la retta componente contenente P è "infinita".

Occorre quindi estendere la definizione di retta tangente in modo da includere le coniche degeneri.

Definizione 4.7.1. Diciamo che una retta r è tangente a una conica C in un suo punto P_0 se

$$m_{P_0}(C,r) \geq 2.$$

Si osservi che, se C è non degenere, allora in ogni suo punto esiste un'unica retta tangente (vedi Teorema 4.6.4), che abbiamo denotato con $T_{P_0}(C)$ e $m_{P_0}(C, T_{P_0}(C))=2$ (vedi Proposizione 4.6.1).

Definizione 4.7.2. Diremo che un punto $P=(x_0,y_0)$ di una conica C di equazione $f(x,y)=0$ è *singolare* per C se

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}=(0,0).$$

Altrimenti il punto $P \in C$ si dirà *semplice* o *non singolare*.

Proposizione 4.7.1. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ una conica degenere.*

a) Se C è unione di due rette distinte passanti per un punto P_0, allora:

- *P_0 è il solo punto singolare di C;*
- *ogni retta per P_0 è tangente a C in tale punto;*
- *se $P \neq P_0$, la retta tangente a C in P è la retta componente di C passante per P.*

b) Se C è unione di due rette parallele e distinte allora C non ha punti singolari.

c) Se C è doppiamente degenere allora ogni punto di C è singolare e ogni retta per esso è tangente a C.

Dimostrazione. *a*) Possiamo assumere (a meno di rototraslazione) che P_0 sia l'origine $O = (0,0)$ e che C abbia equazione

$$f(x,y) := x(ax+by) = 0$$

con $b \neq 0$, in quanto per ipotesi C è costituita da due rette distinte.
-) Sia $P = (\overline{x}, \overline{y}) \in C$; allora

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(\overline{x},\overline{y})} = 2a\overline{x} + b\overline{y}, \qquad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(\overline{x},\overline{y})} = b\overline{x}.$$

Il punto P è singolare se e solo se $(\overline{x}, \overline{y})$ è una una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx \qquad\; = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo se $P = (0,0)$.
-) Se $r_{m,n} : \ (x,y) = \lambda(m,n)$ è una qualunque retta per l'origine,

$$r_{m,n} \cap C : \begin{cases} x = \lambda m \\ y = \lambda n \\ x(ax+by) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 m(am+bn) = 0.$$

Quindi, per ogni $[m,n] \neq [0,1]$ e $[m,n] \neq [b,-a]$ si ha

$$m_O(C, r_{m,n}) = 2$$

e le $r_{0,1}$ e $r_{b,-a}$, che sono esattamente le due componenti di C, intersecano C in O infinite volte. Pertanto ogni retta per O è tangente a C in O.
-) Per concludere, calcoliamo $T_P(C)$ dove $P \neq P_0$. Ora, invece, supponiamo che $P = (0,0)$ e che C abbia equazione:

$$f(x,y) := x(ax+by+c) = 0$$

con $c \neq 0$, in quanto P è non singolare, per ipotesi.
Una retta $r:\ (x, y) = \lambda(m, n)$ è tangente a C se e solo se $\lambda = 0$ è soluzione (almeno) doppia dell'equazione:

$$\lambda m(\lambda am + \lambda bn + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad (am^2 + bmn)\lambda^2 + mc\lambda = 0$$

e ciò accade se e solo se $mc = 0$; tenendo conto che $c \neq 0$, deve essere $m = 0$ e quindi r è la retta $x = 0$, da cui la tesi.

b) Analoga all'ultima parte del caso (*a*).

c) Sia ora C l'unione di due rette coincidenti. Possiamo supporre che C abbia equazione

$$f(x, y) := x^2 = 0.$$

Poiché

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

le due derivate parziali sono entrambe nulle in tutti i punti della retta $x = 0$ e quindi in tutti i punti di C, che risultano dunque singolari. Infine si verifica facilmente che ogni retta che incontra C è tangente a C. □

Valgono anche i viceversa della prima e della terza proprietà enunciate nella precedente proposizione.

Proposizione 4.7.2. *Se C è una conica con un punto singolare allora è degenere. In particolare,*

a) se C ha un solo punto singolare P_0, allora C è semplicemente degenere e precisamente è l'unione di due rette passanti per P_0 (eventualmente complesse e coniugate);

b) se C ha due punti singolari, allora ogni suo punto è singolare e in tal caso C è doppiamente degenere.

Dimostrazione. Proviamo dapprima che, se C è una conica con (almeno) un punto singolare, allora C è degenere. Possiamo supporre (a meno di una traslazione) che C, avente equazione (4.23), sia singolare in $P_0 = (0, 0)$. Allora, per definizione, entrambe le derivate parziali si annullano in P_0, cioè il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2\,a_{11}\,x + 2\,a_{12}\,y + 2\,a_{13} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2\,a_{12}\,x + 2\,a_{22}\,y + 2\,a_{23} = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

ha per soluzione $(x_0, y_0) = (0, 0)$; pertanto $a_{13} = a_{23} = 0$. Sostituendo tali relazioni nell'equazione (4.23) di C e tenendo conto del fatto che $a_{33} = 0$, in quanto la conica passa per l'origine, si ha:

$$C: \quad a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = 0.$$

Chiaramente tale equazione rappresenta l'unione delle due rette

$$\begin{aligned} r: \quad & a_{11}y = \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right) x \\ s: \quad & a_{11}y = \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right) x. \end{aligned}$$

a) Se l'origine è il solo punto singolare di C, allora il sistema (4.26) ha come unica soluzione $(0, 0)$, dunque il determinante della matrice dei coefficienti $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è non nullo. Pertanto le rette r ed s, determinate prima, sono distinte.

b) Se C ha due punti singolari, è degenere per quanto visto sopra, ma non può essere semplicemente degenere per la Proposizione 4.7.1-$(a) - (b)$; pertanto deve essere doppiamente degenere e quindi ogni suo punto è singolare per la Proposizione 4.7.1-(c). □

I risultati della Proposizione 4.7.1 e Proposizione 4.7.2 si possono riassumere immediatamente nel seguente:

Teorema 4.7.3. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica. Valgono i seguenti fatti:*

a) se C è non degenere allora non ha punti singolari;

b) C è unione di due rette incidenti se e solo se ha un solo punto singolare;

c) C è doppiamente degenere se e solo se ha due (o, equivalentemente, infinti) punti singolari.

Vedremo che nel piano proiettivo vale anche il viceversa dell'implicazione (a) e che il caso (b) comprenderà anche la configurazione di due rette parallele (e quindi descriverà tutte le coniche semplicemente degeneri).

Concludiamo questo paragrafo tornando nel piano euclideo per risolvere una questione posta alla fine del Paragrafo 4.5, cioè determinare asse e vertice di una parabola.

Precedentemente abbiamo osservato come è possibile determinare la direzione dell'asse di una parabola in forma generale (vedi Proposizione 4.5.6). Per determinare il vertice di una parabola è necessario tuttavia applicare la nozione di retta tangente, osservando preliminarmente che una parabola è una conica non degenere e quindi ammette un'unica retta tangente in ogni suo punto (vedi Teorema 4.7.3 e Teorema 4.6.4).

Lemma 4.7.4. *Si consideri una parabola $C \subset \mathbb{E}^2$ di vertice V. Allora V è l'unico punto di C in cui la retta tangente è ortogonale all'asse della parabola.*

Dimostrazione. Poiché si tratta di provare proprietà geometriche (euclidee), come al solito possiamo dimostrarle per una parabola in forma canonica. Sia dunque

$$C: \quad f(x, y) := x^2 - 2py = 0.$$

È chiaro che il vertice di C è $V = (0, 0)$ e che $x = 0$ è l'asse.
La retta tangente a C in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è parallela al vettore

$$t_{P_0}(C) = \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{P_0} = (2p, 2x_0).$$

Ovviamente $(2p, 2x_0)$ è ortogonale all'asse $x = 0$ se e solo se

$$\langle (2p, 2x_0), (0, 1)\rangle = 0 \iff x_0 = 0 \iff P_0 = (0, 0) = V.$$

$\square$

Osservazione 4.7.1 (*Metodo per la determinazione dell'asse e del vertice di una parabola)***.**
Sia C una parabola e siano B ed A le matrici ad essa associate in un sistema di riferimento $(O; x, y)$.
Ricordiamo che la matrice A ha un autovalore nullo e l'altro non nullo; sia questo α. Denotando i rispettivi autospazi con W_0 e W_α, essi sono ortogonali in quanto A è simmetrica reale.
Abbiamo visto che l'asse di C ha per giacitura W_0 (per la Proposizione 4.5.6), dunque W_α è la giacitura della retta tangente a C nel vertice, per il Lemma 4.7.4.

PROCEDURA

i) Si determinano gli autospazi W_0 e W_α;

ii) sia r_h la generica retta di giacitura W_α con

$$r_h: \ ax + by + h = 0.$$

Si impone che r_h sia tangente a C e si determina il valore h_0 per cui ciò accade.

iii) Per il Lemma 4.7.4, la retta r_{h_0} è la tangente a C nel vertice. Dunque $V := C \cap r_{h_0}$ è il vertice di C.

iv) L'asse di C è dunque la retta $L = V + W_0$.

Osservazione 4.7.2 (*Metodo alternativo)*.

$i')$ Come $i)$.

$ii')$ Si calcola il vettore tangente $t_P(C)$ a C in un suo generico punto P.

$iii')$ Si impone che $t_P(C)$ sia ortogonale a W_0; in tal modo si determina il punto in cui ciò accade: tale punto è il vertice.

$iv')$ Infine si determina l'asse come prima.

Esempio 4.7.2. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola

$$C: \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0.$$

Poiché le matrici associate a C sono

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha: $\det(B) = -25 \neq 0$ e $\det(A) = 0$; quindi C è proprio una parabola. Calcoliamo l'autospazio W_0 di A, cioè lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$; poiché tale sistema ha rango 1, in quanto $\det(A) = 0$, esso risulta equivalente ad una sola delle due equazioni, ad esempio: $2x+y = 0$. Pertanto $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$. Consideriamo la generica retta ortogonale a $(1, -2)$ (e quindi parallela alla tangente nel vertice):

$$r_h: \quad x - 2y + h = 0.$$

La retta r_h è tangente a C se e solo se i due punti che costituiscono $r_h \cap C$ coincidono se e solo se il sistema

$$r_h \cap C: \quad \begin{cases} x = 2y - h \\ 4(2y - h)^2 + 4(2y - h)y + y^2 - 2(2y - h) + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti. Si impone tale condizione alla seconda equazione (in y):

$$25y^2 - 20hy + 4h^2 + 2h - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta/4 = 25(1 - 2h).$$

Quindi $\Delta = 0$ se e solo se $h_0 = 1/2$; otteniamo dunque la retta tangente nel vertice:

$$r_{h_0} : x = 2y - 1/2.$$

Pertanto il vertice V è dato da

$$V = r_{h_0} \cap C: \quad \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ 25y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ (5y - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi il vertice è il punto $V = (-1/10, 1/5)$.
Infine l'asse è la retta per V parallela all'autospazio $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$:

$$2x + y = 0.$$

Esempio 4.7.3. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola nell'esempio precedente

$$C: \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

usando il secondo metodo proposto nell'Osservazione 4.7.1. Come prima, si determina $W_0 = \langle(1, -2)\rangle$. Si calcola poi il vettore tangente a C nel suo generico punto $P_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} t_{P_0}(C) = &\left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{P_0} = \\ &= (-4x - 2y - 4, 8x + 4y - 2)_{P_0} = \\ &= 2(-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione $t_{P_0}(C) \perp W_0$, cioè

$$\langle(-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1), (1, -2)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + y_0 = 0.$$

Inoltre P_0 deve appartenere a C, quindi essere soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 0 \\ 4x_0^2 + 4x_0y_0 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y_0 = -2x_0 \\ -10x_0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1/10, \quad y_0 = 1/5.$$

L'asse si determina come nell'esempio precedente.

4.8 Classificazione delle coniche affini

Al fine di classificare le coniche del piano affine (reale o complesso), dobbiamo usare alcuni risultati analoghi a quelli visti per le coniche del piano euclideo. Qui denotiamo con $\mathbb{A}^2$ il piano affine $\mathbb{A}^2_K$, dove $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ricordiamo brevemente il Teorema 1.10.1, Capitolo 1, dove viene descritta la variazione delle coordinate di un punto di $\mathbb{A}^2$ rispetto a 2 sistemi di riferimento $(O, \mathcal{B})$ e $(O', \mathcal{B}')$. Se $X = {}^t(x, y)$, $X' = {}^t(x', y')$, $P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ e $C = {}^t(c_1, c_2)$ è la colonna delle coordinate di O rispetto a $(O', \mathcal{B}')$, allora si ha

$$X' = PX + C.$$

Si osservi che, in questo caso, P non è necessariamente una matrice ortogonale (come nel caso del piano euclideo $\mathbb{E}^2$) ma semplicemente invertibile. Denotiamo i suoi elementi con $P = (p_{ij})$.
Utilizzando la notazione – introdotta in (1.10), Capitolo 1 – si ponga

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & c_1 \\ p_{21} & p_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come ricordato, $P \in GL(2, K)$ e quindi $\widetilde{Q} \in GL(3, K)$.

Con tali notazioni, vale l'analogo del Teorema 4.3.1, dove veniva descritto come varia l'equazione di una conica rispetto a 2 riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^2$. Omettiamo la dimostrazione in quanto identica a quella del teorema citato.

Teorema 4.8.1. *Siano $(O; x, y)$ e $(O'; x', y')$ due riferimenti affini di $\mathbb{A}^2$ e siano P e $\widetilde{Q}$ come sopra. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ una conica e siano B e A le matrici di $\mathcal{C}$ nel riferimento $(O; x, y)$. Poste*

$$B' := {}^t\widetilde{Q}\, B\, \widetilde{Q} \qquad e \qquad A' := {}^tP\, A\, P$$

*allora B' e A' sono matrici associate a $\mathcal{C}$ nel riferimento $(O'; x', y')$.
In particolare A e A' sono congruenti e B e B' sono congruenti.*

Corollario 4.8.2. *Il rango della matrice completa B di una conica è un invariante affine. Se $K = \mathbb{R}$, anche il segno di* $\det(A)$ *è un'invariante affine.*

Dimostrazione. Immediata conseguenza della Proposizione 4.2.2. □

Possiamo dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione.

Teorema 4.8.3 (Classificazione delle coniche nel piano affine reale)**.**
Ogni conica del piano affine reale $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (costituita da almeno un punto) è affinemente equivalente a una delle seguenti:

$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	parabola
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	parabola degenere
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	ellisse
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	ellisse degenere
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	iperbole
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	iperbole degenere
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenere

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinemente equivalenti.

Dimostrazione. Utilizziamo il Teorema 4.4.3 di classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ e mostriamo che le famiglie ivi elencate sono equivalenti a una delle coniche di questo enunciato. Come al solito, denoteremo con B la matrice associata a una conica della lista del Teorema 4.4.3. Per ognuna di esse, individueremo una matrice $\widetilde{Q} \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ risulti la matrice associata a una conica nella lista $1_{\mathbb{R}}, \ldots, 7_{\mathbb{R}}$.
(P) Vediamo in dettaglio la prima famiglia parabolica cioè

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$

la cui matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q/2 \\ 0 & -q/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente

$${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è associata alla conica $x^2 = y$.

Per le prossime famiglie, citiamo solo la matrice $\widetilde{Q}$.
La seconda famiglia parabolica è $x^2 = q^2$; qui occorre considerare la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con un semplice calcolo si vede che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 = 1$.

(E) La prima famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = q^2$. Usando la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$.
La seconda famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = 0$. Usando la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 0$.

(I) Le matrici $\widetilde{Q}$ necessarie sono le stesse del caso (E) e trasformano le coniche delle famiglie $x^2 - p^2y^2 = q^2$ e $x^2 - p^2y^2 = 0$, rispettivamente, nelle coniche $5_{\mathbb{R}}$ e $6_{\mathbb{R}}$.

(D) La conica doppiamente degenere è esattamente $7_{\mathbb{R}}$.

Per provare che le coniche dell'enunciato sono a due a due non affinemente equivalenti, consideriamo la seguente tabella

		rk(B)	det(A)
$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	3	0
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	2	0
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	3	$+$
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	2	$+$
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	3	$-$
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	2	$-$
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	1	0

Per il Corollario 4.8.2 si ha la tesi. □

Vediamo l'analogo risultato nel caso complesso.

Teorema 4.8.4 (Classificazione delle coniche nel piano affine complesso)**.** *Ogni conica del piano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affinemente equivalente a una delle seguenti:*

$I_{\mathbb{C}}$	$x^2 = y$	parabola
$II_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 1$	parabola degenere
$III_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 1$	conica a centro
$IV_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 0$	conica a centro degenere
$V_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenere

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinemente equivalenti.

Dimostrazione. Basta mostrare che le seguenti coniche sono affinemente equivalenti a una di questo enunciato:

(a) quelle elencate nel Teorema 4.8.3: $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$;

(b) quelle considerate nell'Osservazione 4.4.2, cioè le famiglie

$$x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0 \quad e \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

(a) Chiaramente basta esaminare le coniche $5_{\mathbb{R}}$ e $6_{\mathbb{R}}$. La prima ha equazione $x^2 - y^2 = 1$ e sia B la matrice associata. Basta scegliere come matrice $\widetilde{Q} \in GL(3, \mathbb{C})$ la seguente

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In tal modo, ${}^t\widetilde{Q}B\widetilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$.
Del tutto analogo il caso della conica $6_{\mathbb{R}}$.

(b) La famiglia $x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0$ va trattata come la seconda famiglia (P) nella dimostrazione del Teorema 4.8.3: basta scegliere la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C})$$

e si prova che è affinemente equivalente alla conica $II_{\mathbb{C}}$.

Infine l'ellisse immaginaria è affinemente equivalente alla conica $III_{\mathbb{C}}$ attraverso la matrice

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} ia & 0 & 0 \\ 0 & ib & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}).$$

L'ultima affermazione si prova come nel Teorema 4.8.3: qui è sufficiente esaminare il rango di B e la nullità di $\det(A)$. $\square$

Dallo studio precedente, si ha il seguente risultato che caratterizza le coniche affini degeneri e non degeneri e che è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 4.4.2).

Corollario 4.8.5. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2_K$ con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Allora*
- C è non degenere se e solo se $\mathrm{rk}(B) = 3$;
- C è semplicemente degenere se e solo se $\mathrm{rk}(B) = 2$;
- C è doppiamente degenere se e solo se $\mathrm{rk}(B) = 1$.

Dimostrazione. Per il Corollario 4.8.2, il rango di B è un invariante affine. Quindi basta provare la tesi per le coniche dell'enunciato del Teorema 4.8.3 (nel caso reale) o del Teorema 4.8.4 (nel caso complesso). La tesi segue immediatamente dal calcolo dei ranghi nella parte finale delle rispettive dimostrazioni dei due teoremi citati. □

In analogia a quanto visto nel Capitolo 3 sulla chiusura proiettiva di un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, introduciamo l'analoga nozione per le coniche del piano affine.

Definizione 4.8.1. Si consideri un polinomio in due variabili a coefficienti in un campo K e di grado d:

$$f(x, y) \in K[x, y].$$

Diciamo *polinomio omogeneizzato di f rispetto a x_0*, e lo denotiamo con $F = {}^h f$, quello definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

Esempio 4.8.1. Se $f(x, y) = x^2 + y - 1$ e $F = {}^h f$, allora

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0} - 1\right) = x_1^2 + x_0 x_2 - x_0^2.$$

Ricordiamo l'immersione del piano affine nel piano proiettivo (vedi Paragrafo 3.5)

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

definita da

$$(x, y) \mapsto [1, x, y] = [x_0, x_1, x_2], \quad \text{dove} \quad x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}.$$

È chiaro dunque che, se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, allora

$$j_0(C) = \left\{[x_0, x_1, x_2] \;\middle|\; {}^h f(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0,\ x_0 \neq 0\right\}.$$

Se togliamo la limitazione $x_0 \neq 0$, otteniamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$.

Definizione 4.8.2. Se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, diciamo *chiusura proiettiva di C*, e la indichiamo con $\overline{C}$, il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$ definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0.$$

Inoltre, diciamo *punti impropri* di C i punti del piano proiettivo dati da $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$, cioè quelli le cui coordinate omogenee soddisfano il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Come vedremo nel prossimo risultato, i punti impropri di una conica affine sono utili per classificarla facilmente. Prima di procedere, cambiamo la notazione (vedi (4.23)) usata fino ad ora per la generica conica affine.

Definizione 4.8.3. La *generica conica* di $\mathbb{A}^2_K$ è data da

$$f(x,y) = a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{01}\,x + 2\,a_{02}\,y + a_{00} = 0 \qquad (4.27)$$

dove $a_{ij} \in K$, e dunque la sua *matrice completa* e la sua *matrice della forma quadratica* risultano, rispettivamente,

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.8.6 (Classificazione delle coniche affini via i punti impropri)**.** *Sia $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ una conica non degenere. Allora*
- C è una parabola $\iff$ ha 2 punti impropri reali e coincidenti;
- C è un'ellisse $\iff$ ha 2 punti impropri complessi e coniugati;
- C è una iperbole $\iff$ ha 2 punti impropri reali e distinti.

Dimostrazione. Per definizione, i punti impropri di C sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 + 2\,a_{01}\,x_0x_1 + 2\,a_{02}\,x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente, del sistema

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Poichè la prima equazione ha come discriminante $-\det(A)$, si conclude con il Teorema 4.4.2. □

Concludiamo con una nota nozione sulle iperboli nel piano euclideo.

Definizione 4.8.4. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ un'iperbole. Si dicono *asintoti* di C le due rette (reali e distinte) passanti per il centro di C e per i suoi punti impropri.

Osservazione 4.8.1. Se l'iperbole C è data in forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cioè in coordinate omogenee} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_0^2$$

i suoi punti impropri sono $P_\infty = [0, a, b]$ e $Q_\infty = [0, a, -b]$ e il centro è l'origine ovvero $[1, 0, 0]$. Pertanto gli asintoti sono

$$r_{P_\infty} : bx_1 - ax_2 = 0, \quad r_{Q_\infty} : bx_1 + ax_2 = 0.$$

Esercizio C2. Gli asintoti sono le rette tangenti all'iperbole nei suoi punti impropri (estendendo in modo naturale la Definizione 4.6.1 di retta tangente a una conica in un suo punto al piano proiettivo...).

4.9 Coniche proiettive

Quanto visto alla fine del precedente paragrafo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 4.9.1. Si dice *conica* del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_K$ il luogo C dei punti le cui coordinate omogenee soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea del tipo

$$C: \; a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1x_2 + a_{22}\, x_2^2 + 2\, a_{01}\, x_0x_1 + 2\, a_{02}\, x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

dove $a_{ij} \in K$ o, sinteticamente,

$$C: \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

Si dice *matrice associata* a C

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e quindi si dice *equazione matriciale di* C quella espressa come

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

In analogia con quanto visto per le coniche affini, si prova in modo del tutto simile il seguente risultato.

Teorema 4.9.1. *Siano* $[x_0, x_1, x_2]$ *e* $[x'_0, x'_1, x'_2]$ *due sistemi di coordinate omogenee di* $\mathbb{P}^2_K$ *e sia* $\alpha : \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ *il cambio di coordinate omogenee associato a una matrice* $Q \in GL(3, K)$ *dove*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Sia $C \subset \mathbb{P}^2_K$ *una conica di matrice* B *rispetto alle coordinate* $[x_0, x_1, x_2]$ *e matrice* B' *rispetto alle coordinate* $[x'_0, x'_1, x'_2]$*. Allora*

$$B' = {}^tQBQ.$$

Definizione 4.9.2. Due coniche C e C' di $\mathbb{P}^2_K$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività $\alpha : \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ tale che $\alpha(C) = C'$.

Corollario 4.9.2. *Le matrici associate a due coniche proiettivamente equivalenti sono congruenti.*

Ricordando che matrici congruenti hanno lo stesso rango (vedi Proposizione 4.2.2), si ottiene immediatamente il seguente fatto.

Corollario 4.9.3. *Il rango di una matrice associata a una conica è un invariante proiettivo.*

Per questo, se C è una conica proiettiva di matrice B, denoteremo il rango di B anche con $\mathrm{rk}(C)$.

Definizione 4.9.3. Una conica $C \subset \mathbb{P}^2_K$ si dice *semplicemente degenere* se è unione di due rette distinte e *doppiamente degenere* se è unione di due rette coincidenti. Altrimenti, diremo che C è *non degenere*.

Il seguente risultato, che caratterizza le coniche proiettive degeneri e non degeneri, è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 4.4.2) e a quello relativo alle coniche affini (Corollario 4.8.5).

Partiamo da un semplice fatto.

Osservazione 4.9.1. La matrice completa B di una conica $C \subset \mathbb{A}^2_K$, con la notazione introdotta in (4.27), è esattamente la stessa della sua chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2_K$.

Teorema 4.9.4. *Sia $C \subset \mathbb{P}^2_K$ una conica di matrice associata B. Allora:*

1. $\mathrm{rk}(B) = 3 \iff C$ *è non degenere;*
2. $\mathrm{rk}(B) = 2 \iff C$ *è semplicemente degenere;*
3. $\mathrm{rk}(B) = 1 \iff C$ *è doppiamente degenere.*

Dimostrazione. Ci sono due possibilità: o C è la chiusura proiettiva di una conica affine o C è degenere e una sua componente è la retta impropria.
Nel primo caso, per l'Osservazione precedente, si conclude con il Corollario 4.8.5 che stabilisce l'analogo risultato per le coniche affini.
Nel secondo caso, la conica $C \subset \mathbb{P}^2_K$ deve essere di uno dei seguenti tipi:

$$x_0(ax_0 + bx_1 + cx_2) = 0 \quad \text{o} \quad x_0^2 = 0.$$

Con un calcolo immediato, si vede che nel primo caso $\mathrm{rk}(B) = 2$ e nel secondo $\mathrm{rk}(B) = 1$. $\square$

Ricordiamo il seguente importante risultato di Algebra lineare.

Teorema 4.9.5 (*Teorema di Sylvester)*.
Sia K il campo complesso o quello reale e si consideri una forma bilineare simmetrica
$$\beta : K^n \times K^n \longrightarrow K.$$
Allora esiste una base $\mathcal{C}$ di K^n tale che la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica è congruente a una diagonale.

Vediamo le conseguenze nei casi complesso e reale, rispettivamente.

Teorema 4.9.6 (*Trasformazione ad assi principali su $\mathbb{C}$)*.
Si consideri una forma bilineare simmetrica
$$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}.$$
Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^n$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è
$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni). Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che
$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 4.9.5, sia $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{C}^n$ tale che $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. A meno di riordinare i vettori di $\mathcal{C}$, possiamo supporre
$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
dove $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$.
Si considerino ora gli scalari (che esistono in $\mathbb{C}$)
$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \quad \text{tali che} \quad \alpha_i^2 = \lambda_i, \quad \forall\, i = 1, \dots, r$$
e i vettori
$$w_1 := \frac{v_1}{\alpha_1}, \ \dots, \ w_r := \frac{v_r}{\alpha_r}, \ w_{r+1} := v_{r+1}, \ \dots, \ w_n := v_n.$$

E' immediato calcolare, per $i = 1, \dots, r$:

$$\beta(w_i, w_i) = \beta\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_i}{\alpha_i}\right) = \frac{\beta(v_i, v_i)}{\alpha_i^2} = 1.$$

Mentre, per $i = r + 1, \dots, n$ si ha

$$\beta(w_i, w_i) = \beta(v_i, v_i) = 0.$$

Dunque, posta $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$, si ha che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è come richiesta nell'enunciato. $\square$

Teorema 4.9.7 (*Trasformazione ad assi principali su* $\mathbb{R}$**)**.
Si consideri una forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *tale che la matrice* $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ *è*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni).
Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ *esiste una matrice* $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ *tale che*

$$^tQBQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Analoga alla precedente, ma in questo caso si riordinano gli elementi della diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}, 0, \dots, 0$ in modo che

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, p; \qquad \lambda_i < 0, \quad i = p + 1, \dots, p + q.$$

Infine, si scelgono gli α_i in modo che $\alpha_i^2 = \lambda_i$, per $i = 1, \dots, p$, e $\alpha_i^2 = -\lambda_i$, per $i = p + 1, \dots, p + q$. $\square$

Definizione 4.9.4. Se $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica congruente alla matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diciamo che la coppia di interi (p, q) è la *segnatura* di B.

Definizione 4.9.5. Diciamo *segnatura di una conica* $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la segnatura (p, q) di una sua matrice associata B, supponendo $p \geq q$ (non è restrittivo, in quanto anche $-B$ è associata alla stessa conica).

Osservazione 4.9.2. Per il Teorema 4.9.7, la segnatura (p, q) di una conica $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è un invariante proiettivo (con $p \geq q$). Inoltre $p + q = \mathrm{rk}(C)$.

Osservazione 4.9.3. Si noti che un cambio di nome delle coordinate omogenee nell'equazione di una conica C corrisponde ad applicare un cambio Q di riferimento proiettivo, e quindi non si influenza né il rango né la segnatura di C. Ad esempio, lo scambio $x_0 \leftrightarrow x_2$ corrisponde alla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Osservazione 4.9.4. Il Corollario 4.9.3 e i Teoremi 4.9.6 (nel caso complesso) e 4.9.7 (nel caso reale) di *Trasformazione ad assi principali* forniscono immediatamente la lista delle possibili equazioni delle coniche del piano proiettivo e quindi la classificazione delle coniche proiettive.

Tuttavia, nelle dimostrazioni dei prossimi teoremi, si costruiscono esplicitamente i cambi di coordinate proiettive che "unificano" alcuni tipi di coniche affini. Le dimostrazioni risultano in tal modo costruttive (anche se ridondanti). Inoltre si verifica, nel caso reale, che due coniche sono proiettivamente equivalenti *se e solo se* hanno la stessa segnatura.

Teorema 4.9.8 (*Classificazione delle coniche proiettive reali*).
Ogni conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ *è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:*

$$\begin{array}{ll} (I)_{\mathbb{R}} & x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ (II)_{\mathbb{R}} & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ (III)_{\mathbb{R}} & x_0^2 + x_1^2 = 0 \\ (IV)_{\mathbb{R}} & x_0^2 - x_1^2 = 0 \\ (V)_{\mathbb{R}} & x_0^2 = 0. \end{array}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la tabella compilata alla fine della dimostrazione del Teorema 4.8.3 sulla *classificazione delle coniche di* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, riscrivendo (i polinomi che definiscono) le coniche in coordinate omogenee e aggiungendo due coniche degeneri (che denotiamo con S e D, semplicemente e doppiamente) aventi la retta impropria come componente. Inoltre aggiungiamo l'ellisse immaginaria (che denotiamo con E) che si era omessa nella classificazione affine in quanto priva di punti reali.

Invece della colonna che riportava il determinante di A, consideriamo la colonna della segnatura (p,q), avendo osservato che $p+q=\text{rk}(C)$ e $p \geq q$.

		$\text{rk}(C)$	(p,q)
$1_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0x_2$	3	$(2,1)$
$2_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0^2$	2	$(1,1)$
$3_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$	3	$(2,1)$
$4_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2$	2	$(2,0)$
$5_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2$	3	$(2,1)$
$6_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2$	2	$(1,1)$
$7_{\mathbb{R}}$	x_1^2	1	(1)
E	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2$	3	$(3,0)$
D	x_0^2	1	(1)
S	x_0x_1	2	$(1,1)$

Proviamo ora che le seguenti coniche sono proiettivamente equivalenti:

-) $1_{\mathbb{R}} \sim 3_{\mathbb{R}} \sim 5_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$

Cambiando segno e nome alle variabili ($x_0 \leftrightarrow x_1$), $5_{\mathbb{R}}$ diventa $3_{\mathbb{R}}$. A sua volta, quest'ultima è congruente a $(II)_{\mathbb{R}}$, cambiando nome alle variabili. Infine, il cambio di coordinate Q applicato alla conica $1_{\mathbb{R}}$, dove

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene la matrice

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

associata alla conica $(II)_{\mathbb{R}}$.

-) $2_{\mathbb{R}} \sim 6_{\mathbb{R}} \sim S \sim (IV)_{\mathbb{R}}$: analogo.

-) $7_{\mathbb{R}} \sim D \sim (V)_{\mathbb{R}}$: ovvio.

-) Infine si osservi che E è la conica $(I)_{\mathbb{R}}$ e che $4_{\mathbb{R}} \sim (III)_{\mathbb{R}}$ con un semplice cambio di variabili. □

Teorema 4.9.9 (*Classificazione delle coniche proiettive complesse).*
Ogni conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$(ND)_{\mathbb{C}} \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$(SD)_{\mathbb{C}} \qquad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

$$(DD)_{\mathbb{C}} \qquad x_0^2 = 0$$

dove le precedenti sigle significano, rispettivamente, non degenere, semplicemente degenere, doppiamente degenere.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.9.8, è sufficiente mostrare che:
-) $(I)_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$ attraverso una matrice $Q \in GL(3, \mathbb{C})$;
-) $(III)_{\mathbb{R}} \sim (IV)_{\mathbb{R}}$ attraverso una matrice $Q' \in GL(3, \mathbb{C})$.
Immediatamente si verifica che

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfano i precedenti requisiti. $\square$

Concludiamo questo paragrafo sulle coniche nel piano proiettivo studiando le intersezioni di una conica e una retta in $\mathbb{P}^2_K$, quando $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, completando e generalizzando i risultati riguardo alle coniche affini (vedi Proposizione 4.6.1, Proposizione 4.6.2 e Definizione 4.6.1).

Proposizione 4.9.10. *Una conica non degenere e una retta hanno esattamente due punti di intersezione in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, eventualmente coincidenti.*

Dimostrazione. Siano C la generica conica e r la generica retta di $\mathbb{P}^2$ di equazioni

$$C: \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0, \quad r: \ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0.$$

Non è restrittivo supporre $b_0 \neq 0$; posti $c_1 := -b_1/b_0$ e $c_2 := -b_2/b_0$, si ha $r: \ x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Quindi

$$C \cap r: \begin{cases} \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j & = & 0 \\ x_0 & = & c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{cases}$$

e sostituendo si ottiene, con opportuno cambio di nomi dei coefficienti,

$$C \cap r: \begin{cases} \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2 & = & 0 \\ x_0 & = & c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{cases}$$

Se la prima equazione è di secondo grado, avendo i coefficienti complessi ed essendo omogenea, ammette 2 radici in $\mathbb{C}^2$ (e tutte quelle proporzionali), che denotiamo con (y_1, y_2) e (z_1, z_2). Ovviamente tali soluzioni possono essere coincidenti.
Sostituendole, rispettivamente, nella seconda equazione, otteniamo i due punti di intersezione di C e r:

$$[c_1 y_1 + c_2 y_2, y_1, y_2], \quad [c_1 z_1 + c_2 z_2, z_1, z_2].$$

Altrimenti l'equazione suddetta diventa l'identità $0 = 0$ e quindi sono soluzioni del sistema tutti i punti tali che $x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. In altre parole, $C \cap r = r$, quindi C sarebbe degenere, contro l'ipotesi. $\square$

Definizione 4.9.6. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ siano C una conica non degenere, r una retta e $C \cap r = \{P, Q\}$. Se $P \neq Q$, diciamo che C e r sono *secanti in P e Q* e che la *molteplicità di intersezione* di C e r in P (rispettivamente, in Q) è 1; scriveremo $m_P(C,r) = 1$ (rispettivamente, $m_Q(C,r) = 1$).
Invece, se $P = Q$, diciamo che C e r sono *tangenti in P* e scriveremo $m_P(C,r) = 2$ o anche $C \cap r = \{P^2\}$.

Osservazione 4.9.5. Si può provare che, se $P \in C$ sono una conica non degenere e un suo punto del piano affine $\mathbb{A}^2$ e $t = T_P(C)$ è la retta tangente a C in P, allora (attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$) la chiusura proiettiva $\overline{t}$ è la retta tangente a $\overline{C}$ in P, nel senso della definizione precedente.

Esempio 4.9.1. Nel piano euclideo complesso una parabola e il suo asse si incontrano in un solo punto (il vertice). Nel piano proiettivo, hanno invece due punti in comune, secondo quanto visto nella precedente Proposizione. Vediamo un caso numerico.
Siano $C : y = x^2$ e $r : x = 0$. La loro intersezione in $\mathbb{P}^2$ è data da

$$C \cap r : \begin{cases} x_1^2 - x_0x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_0x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} [0,0,1] = r_\infty \\ [1,0,0] = V \end{array}.$$

Ovviamente il primo dei due è un punto improprio (non rilevabile in $\mathbb{E}^2$), e precisamente è il punto improprio dell'asse r.