Geometria 2

Anno accademico 2023-2024

Foglio di esercizi n.11

22 maggio 2024

1) Classificare la conica affine di equazione
$$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 6x - 5y + 3 = 0$$
e trovarne i punti singolari.

2) Determinare l'asse e il vertice della parabola di equazione
$$x^2 - 6xy + 9y^2 + x + 4y - 1 = 0.$$

3) Dimostrare che ogni iperbole di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è affinemente equivalente all'iperbole $xy = 1$.

4) Determinare le tangenti comuni alle due coniche nel piano affine reale
$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$
$$C_2 : x^2 + 2y^2 - 4x - 1 = 0.$$
Quante sono le tangenti comuni nel piano affine complesso?

5) Ridurre a forma canonica la conica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione
$$\Gamma : \ 5x_1^2 + 8x_0x_2 = 0$$
specificando la matrice Q che diagonalizza la matrice B di Γ.

6) Determinare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che trasforma la parabola Γ dell'esercizio (5) nella circonferenza $C : \ x^2+y^2 = 1$. *(Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente!)*

7) Determinare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ che trasforma la conica di equazione
$$xy = 1$$
nella conica di equazione
$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Soluzione dell'Esercizio 4, Foglio 11

Dal disegno delle coniche, si può presumere che ci siano 2 tangenti comuni nel piano reale e che non siano parallele all'asse y. Quindi consideriamo la generica retta del piano affine reale

$$r_{m,q}: \quad y = mx + q$$

e imponiamo che sia tangente a entrambe le coniche date.

Tangenza a C_1: i punti di $C_1 \cap r_{m,q}$ devono coincidere. Dunque il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + q \\ x^2 + (mx + q)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + q \\ (1 + m^2)x^2 + 2mqx + q^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

deve avere due radici coincidenti. Imponiamo dunque l'annullarsi del discriminante

$$0 = \Delta/4 = m^2q^2 + (1 + m^2)(1 - q^2) \quad \Rightarrow \quad m^2 - q^2 + 1 = 0.$$

Tangenza a C_2: i punti di $C_2 \cap r_{m,q}$ devono coincidere. Dunque il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x^2 + 2y^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + q \\ x^2 + 2(mx + q)^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

deve avere due radici coincidenti. Come prima, si impone l'annullarsi del discriminante della seconda equazione nella sola x cioè

$$0 = \Delta/4 = 4(mq - 1)^2 + (1 + 2m^2)(1 - 2q^2) \quad \Rightarrow \quad -8mq + 5 - 2q^2 + 2m^2 = 0.$$

Le due condizioni di tangenza alle coniche danno quindi il sistema:

$$\begin{cases} m^2 - q^2 = -1 \\ 2m^2 - 2q^2 - 8mq + 5 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo la prima condizione nella seconda si ottiene: $2(-1) - 8mq + 5 = 0$, cioè

$$8mq = 3 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{8q}$$

che, sostituito a sua volta nella prima equazione fornisce i (quattro) valori di q:

$$\left(\frac{3}{8q}\right)^2 - q^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 64q^4 - 64q^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = \frac{32 \pm 40}{64}.$$

E' chiaro che il valore di q^2 corrispondente al segno $-$ è negativo (e quindi corrisponde a due valori complessi non reali di q). Si ottengono invece 2 valori reali di q per il segno $+$:

$$q^2 = \frac{32 + 40}{64} = \frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad q = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

i quali, sostituiti nella relazione

$$m = \frac{3}{8q}$$

forniscono le due rette tangenti (reali) richieste:

$$q = \frac{3}{2\sqrt{2}},\ m = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad r_1 :\ y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

e

$$q = -\frac{3}{2\sqrt{2}},\ m = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad r_2 :\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Soluzione dell'Esercizio 5, Foglio 11

Consideriamo la chiusura proiettiva di Γ che, per semplicità, chiameremo con lo stesso nome:

$$\Gamma: \ 5x_1^2 + 8x_0x_2 = 0.$$

Occorre applicare il Teorema 4.9.5 e la sua conseguenza (Teorema 4.9.7: *Trasformazione ad assi principali su* $\mathbb{R}$). Dunque consideriamo la matrice B associata a Γ:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e procediamo alla sua diagonalizzazione. Il suo polinomio caratteristico risulta

$$P_B(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 4 \\ 0 & 5-T & 0 \\ 4 & 0 & -T \end{vmatrix} = -(T-5)(T-4)(T+4)$$

e quindi gli autovalori (reali perché B è una matrice simmetrica reale) sono $5, 4, -4$.
Gli autospazi relativi sono

$$V_5 = \ker(B - 5I) = \langle (0,1,0) \rangle$$
$$V_4 = \ker(B - 4I) = \langle (1,0,1) \rangle$$
$$V_{-4} = \ker(B + 4I) = \langle (1,0,-1) \rangle.$$

Dunque si ottiene una base (ortogonale) di autovettori. La matrice $\overline{Q}$ che ha per colonne tale base di autovettori (non è necessario normalizzarli!), deve essere pensata come la proiettività che diagonalizza B, cioè

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e infatti} \quad {}^t\overline{Q}B\overline{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

(verificare il prodotto!). Si osservi che ${}^t\overline{Q}B\overline{Q}$ è sicuramente diagonale, ma non ha gli autovalori di B sulla diagonale: questo è dovuto al fatto che le colonne di $\overline{Q}$ non sono normalizzate. Tuttavia questo è irrilevante, in quanto si dovrà comunque "riscalare" la base di autovettori ottenuta sopra, al fine di ottenere solo $1, -1, 0$ sulla diagonale della matrice finale della conica.

A tale scopo si procede come nella dimostrazione del Teorema 4.9.7 e si definisce la matrice Q (derivata da $\overline{Q}$ e dagli elementi della diagonale di ${}^t\overline{Q}B\overline{Q}$) come segue:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} \end{pmatrix} \quad \text{e infatti} \quad {}^tQBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: B'.$$

Tramite la proiettività associata a Q, la matrice della conica è ora B' e dunque la sua equazione (quella canonica) diventa

$$\Gamma: \ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$