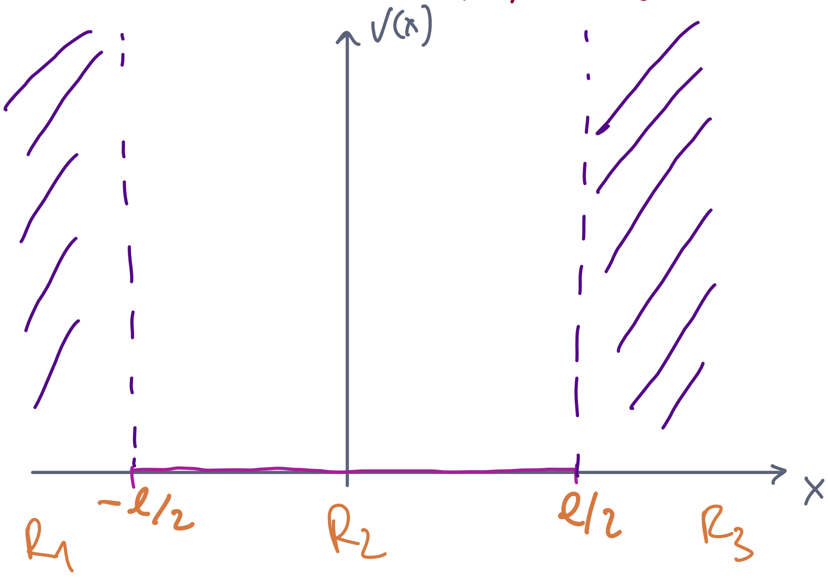
BUCA RETTANGOLARE INFINITA



Il potenziale ha una DISCONTINUITÀ INFINITA in $x=-\ell/2$ e $x=\ell/2$

$\downarrow$

$\psi_E(x)$ è continua in questi due punti, ma non necessariamente derivabile

$$\psi_E'' = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x)-E\right)\psi_E(x)$$

R_1) Qui l'eq. diventa $\psi_E'' = \Omega^2\psi_E(x)$ con $\Omega\to\infty$ (Ω cost.)

$\Rightarrow \psi_E(x) = Ae^{\Omega x} + Be^{-\Omega x} \longrightarrow$ B deve essere nullo, altrim. funz. esplode a $x\to-\infty$ diventando non-accettabile $\longrightarrow$

$\rightarrow \psi_E(x) = Ae^{\Omega x} \xrightarrow[\Omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow \psi_E^{(1)}(x)=0 \quad x\in R_1$

R_3) Analogamente a R_1: $\psi_E^{(3)}(x)=0 \quad x\in R_3$

R_2) L'equazione è $\psi_E'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_E$. Definiamo $K\equiv\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. La sol. è

$$\psi_E^{(2)}(x) = c^+e^{ikx} + c^-e^{-ikx} \qquad x\in R_2.$$

CONDIZIONI DI RACCORDO (ψ_E continua in $x=\pm\ell/2$):

$$\begin{matrix}\psi_E^{(2)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(1)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) \\ \psi_E^{(2)}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(3)}\left(\frac{\ell}{2}\right)\end{matrix} : \begin{cases} c^+e^{-ik\ell/2} + c^-e^{ik\ell/2} = 0 \\ c^+e^{ik\ell/2} + c^-e^{-ik\ell/2} = 0 \end{cases}$$

2 eq. (lineari omogenee) in 2 incognite c^+, c^-.

Sistema lineare omogeneo nelle incognite c^+, c^-:

$$M\begin{pmatrix}c_2^+\\c_2^-\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-ik\ell/2} & e^{ik\ell/2} \\ e^{ik\ell/2} & e^{-ik\ell/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^+\\c^-\end{pmatrix} = 0$$

ha soluz. $(c^+, c^-) \neq (0,0)$ solo se la matrice M ha rango minore di 2 (cioè se $\det M = 0$)

$$\det M = e^{-ikl} - e^{ikl} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2ikl} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ikl = 2in\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

(vedremo poi che $n \to -n$ non cambia l'autostato)

$$\Rightarrow \boxed{K_n = \frac{n\pi}{l}}$$

⤳ Questa è una condizione sull'Energia E. Infatti $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\hookrightarrow \frac{2mEl^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

possibili valori dell'en.

con $\underline{n \neq 0}$

(altrimenti $K = 0$ e $\psi_E^{(2)}(x) = 0 \quad \forall x \in R_2$)

$$Kl = n\pi \Rightarrow e^{ikl} = e^{i\pi n} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema lineare, per $k_n = \frac{n\pi}{l}$

$$\begin{pmatrix} e^{-ik_n l/2} & e^{ik_n l/2} \\ e^{ik_n l/2} & e^{-ik_n l/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

$$\Big| \quad e^{ik_n l} = e^{i\pi n}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi n/2} & e^{i\pi n/2} \\ e^{i\pi n/2} & e^{-i\pi n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

è equivalente a

qta riga dipende lin. dalle prima riga

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi n} \\ \cancel{e^{i\pi n}} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} \to c^+ + e^{i\pi n} c^- = 0$$

$$\downarrow$$

$$c^+ + (-1)^n c^- = 0$$

n pari : $c^- = -c^+$ $\quad \underline{n = 2m}$

$$\psi_{2m}(x) = c^+ \left(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right) = \qquad \left(k_n = \frac{n\pi}{\ell} \right)$$

$$= 2ic^+ \operatorname{sen}(k_n x) = 2ic^+ \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell} \right) \qquad m \neq 0$$

DISPARI $(x \to -x)$

n dispari : $c^- = c^+$ $\quad \underline{n = 2m+1}$

$$\psi_{2m+1}(x) = c^+ \left(e^{ik_n x} + e^{-ik_n x} \right)$$

$$= 2c^+ \cos(k_n x) = 2c^+ \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell} \right)$$

PARI $(x \to -x)$

Calcoliamo valore di c^+ affinché le funz. siano NORMALIZZATE:

$$1 = \|\psi_{2m}\|^2 = 4|c^+|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2m\pi x}{\ell} \right) dx = 2|c^+|^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(1 - \cos\left(\frac{4m\pi x}{\ell} \right) \right) dx =$$

$$= 2|c^+| \left(\ell - \frac{\ell}{4m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4m\pi x}{\ell} \right) \Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} \right) = 2\ell |c^+|^2$$

$\Rightarrow c^+ = \dfrac{-i}{(2\ell)^{1/2}}$ a meno di una fase arbitraria. Quindi la funz normalizzata è:

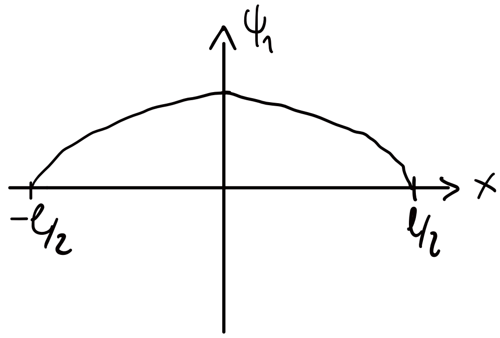
$$\psi_{2m}(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell} \right)$$

Analogamente, la funzione con $n = 2m+1$ normalizzata è

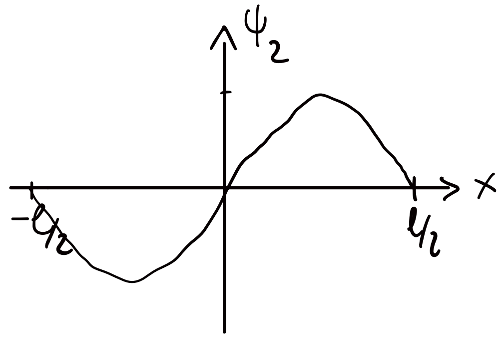
$$\psi_{2m+1}(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell} \right)$$

Esempi

$n = 1$



$n=2$



Spettro dell'en. è DISCRETO :

- Per ogni valore E_n dell'energia trovo una sola autofunz. (autostato) (LIVELLO ENERGETICO è NON- DEGENERE)
- Le autofunzioni $\in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ possono rappresentare stati del sistema.
- Le autofunzioni sono REALI (a meno di un fattore complesso cost.)
- Le autofunzioni hanno PARITÀ DEFINITA ($V(-x) = V(x)$)
- Lo spettro è limitato inferiormente ($V(x) \geq 0 \Rightarrow E > 0$) il livello energetico di minima energia è

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}$$ ← AUTOSTATO CORRISPONDENTE è detto STATO FONDAMENTALE

(⤳ in particolare la particella non può avere en. nulla ; questo lo si può ricavare dal principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

⇓

In questo problema $\Delta x_{max} = \ell$

⇓

$\Delta p_{min} = \frac{\hbar}{2\ell}$ ⤳ $E = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{4m\ell^2}$)

Calcoliamo i valori medi di X e P negli autostati

Ricordiamo che $\psi_n(x)$ ha parità definita, quindi:

1) $|\psi_n(x)|^2$ è una funz. pari $\Rightarrow \langle X \rangle_{\psi_n} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x |\psi_n(x)|^2 dx = 0$

2) $\frac{d\psi_n(x)}{dx}$ ha parità opposta a $\psi_n(x) \Rightarrow \psi_n^* \frac{d}{dx}\psi_n$ è dispari

$$\Rightarrow \langle P \rangle_{\psi_n} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \psi_n^* \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi \, dx = 0$$

Per quanto riguarda la varianza $\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle_\psi - \langle X \rangle_\psi^2}$, ci serve calcolare integrali del tipo $\int x^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2} x)$ e $\int x^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2} x)$.

Infatti:

$$\langle X^2 \rangle_{\psi_n} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) \\ \cos^2\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right) \end{pmatrix} dx$$

$n = 2m$

$n = 2m+1$

$$\frac{2}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha x}{2}}_{\cos^2\frac{\alpha x}{2}} dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 (1 \mp \cos\alpha x)\, dx = \frac{1}{\ell}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\ell/2}^{\ell/2} \mp \frac{1}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\cos\alpha x\, dx$$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\cos\alpha x\, dx = \frac{d}{d\alpha}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x\operatorname{sen}\alpha x\, dx = -\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\cos\alpha x\, dx =$$

$$= -\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\left.\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\right|_{-\ell/2}^{\ell/2}\right) = -\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{2}{\alpha}\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2}\right) =$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{2}{\alpha^2}\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2} + \frac{\ell}{\alpha}\cos\frac{\alpha\ell}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{\alpha^3}\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2} + 2\frac{\ell}{\alpha^2}\cos\frac{\alpha\ell}{2} + \frac{\ell^2}{2\alpha}\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2}$$

$$= \frac{\ell^2}{12} \mp \left(\left(\frac{\ell}{2\alpha} - \frac{4}{\ell\alpha^3}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2} + \frac{2}{\alpha^2}\cos\frac{\alpha\ell}{2}\right)$$

$$\psi_{2m} = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2}\operatorname{sen}\left(\frac{4m\pi x}{2\ell}\right) \rightarrow \alpha = \frac{4m\pi}{\ell} \quad \left(\alpha = \frac{2m\pi}{\ell}\right) \longrightarrow \frac{\alpha\ell}{2} = 2m\pi \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2} = 0\\ \cos\frac{\alpha\ell}{2} = 1\end{cases}$$

$$\psi_{2m+1} = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi x}{2\ell}\right) \rightarrow \alpha = \frac{2(2m+1)\pi}{\ell} \rightarrow \frac{\alpha\ell}{2} = (2m+1)\pi \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{sen}\frac{\alpha\ell}{2} = 0\\ \cos\frac{\alpha\ell}{2} = -1\end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2m\pi}{\ell}$$

$$\langle x^2\rangle_{\psi_{2m}} = \frac{\ell^2}{12} - \frac{2\ell^2}{(2m\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \Longrightarrow \quad \langle x^2\rangle_{\psi_m} = \ell^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2m^2\pi^2}\right)$$

$$\langle x^2\rangle_{\psi_{2m+1}} = \frac{\ell^2}{12} + \left(-\frac{2\ell^2}{(2m\pi)^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x_{\psi_m} = \ell\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2m^2\pi^2}}$$

Per quanto riguarda la varianza di P devo calcolare integrali del tipo

$$\left(\frac{2}{\ell}\right)\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \psi_n(x)^* \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) = -\frac{2\hbar^2}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right) \begin{matrix}\mathrm{sen}^2\frac{\alpha x}{2}\\ \cos^2\frac{\alpha x}{2}\end{matrix}\, dx$$

$$= \frac{\hbar^2\alpha^2}{2\ell}\frac{1}{2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}(1 \mp \cos\alpha x)\,dx =$$

$$= \frac{\hbar^2\alpha^2}{4\ell}\left(\ell \mp \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha x\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2}\right) = \frac{\hbar^2\alpha^2}{4} \mp \frac{\hbar^2\alpha}{2\ell}\underbrace{\mathrm{sen}\frac{\alpha\ell}{2}}_{=0}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\frac{4n^2\pi^2}{\ell^2} = \left(\frac{\hbar}{\ell}\right)^2 n^2\pi^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P_{\psi_n} = \frac{n\pi\hbar}{\ell}$$

Si può controllare che

$$\Delta X_{\psi_n}\,\Delta P_{\psi_n} > \frac{\hbar}{2}$$

$\Leftarrow$ Soddisfa il principio di indeterminazione di Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$)

Oppure possiamo calcolare la probabilità che la particella si trovi a destra, cioè $x \in [0, \ell/2]$

Facciamolo per $\psi_{2m} = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right)$

$$\text{Prob}(x \in [0, \ell/2]) = \int_0^{\ell/2} \left(\frac{2}{\ell}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell/2}\left(1 - \cos\left(\frac{4m\pi x}{\ell}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}$$ $\Leftarrow$ Q.to risultato si poteva indovinare notando che $|\psi_{2m}(x)|^2$ è una funz. pari.

La prob. che la particella si trovi in un generico intervallo $[x_1, x_2]$ è, nello STATO FONDAM. ($m=1$):

$$\underset{\psi\text{ stato fondam.}}{\text{Prob}(x \in [x_1, x_2])} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{2}{\ell}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{1}{\ell}\int_{x_1}^{x_2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right)dx =$$

$+ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\frac{\ell}{2\pi}$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\ell} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_2}{\ell}\right) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_1}{\ell}\right)$$

Se per esempio scegliamo l'intervallo $\left[0, \frac{\ell}{4}\right]$:

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\ell}{4}$ $\Rightarrow$ $\text{Prob} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$

MISURE di ENERGIA in AUTOSTATI di H

Dato un sistema come qlo appena studiato, con $\hat{H}$ a spettro discreto, autovalori E_n, e relativi autostati ψ_n, possiamo calcolare la distribuzione di misure di Energia nello stato ψ_n.

- Valore medio di H:

$$\langle H \rangle_{\psi_n} = (\psi_n, \hat{H}\psi_n) = (\psi_n, E_n\psi_n) = E_n \|\psi_n\|^2 = E_n$$

ψ_n normalizzata.

- Valore medio di H^2:

$$\langle H^2 \rangle_{\psi_n} = (\psi_n, \hat{H}^2\psi_n) = (\psi_n, E_n\hat{H}\psi_n) = (\psi_n, E_n^2\psi_n) = E_n^2$$

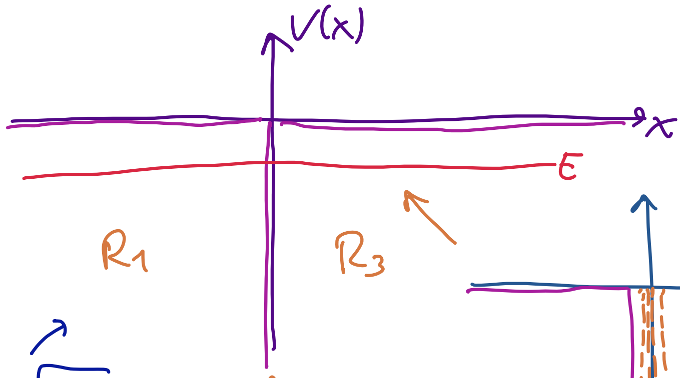
- Varianza:

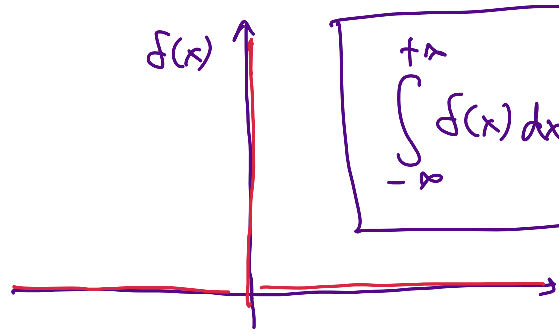
$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{E^2 - (E)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ Se il sistema è nell'autostato ψ_n di $\hat{H}$, una misura di H darà con PROBABILITÀ 1 il risultato E_n.

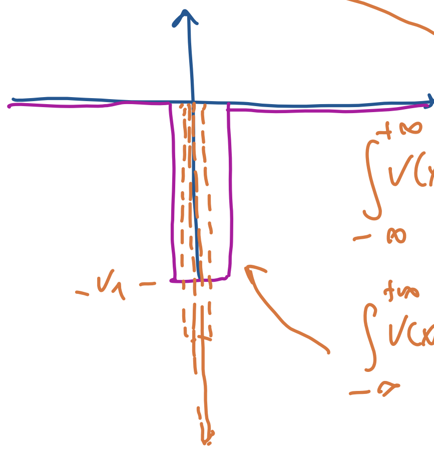
Extra: POTENZIALE A DELTA DI DIRAC

$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) \qquad \alpha > 0$$





$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = -\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) = -\ell V_1$$

$$\vec{p}_1 = \sqrt{2mE} = i\sqrt{2m|E|} = i q_1 = p_3$$

$\underline{E < 0}$

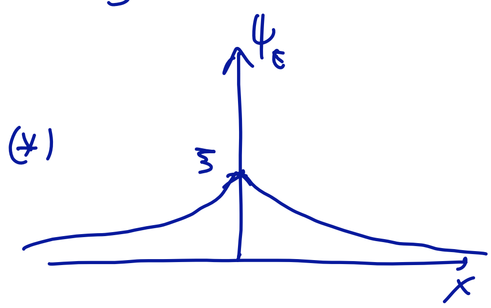
$$\psi_E^{(1)} = \cancel{c_1^+ e^{-q_1 x/\hbar}} + c_1^- e^{q_1 x/\hbar} \qquad x < 0$$

$$\psi_E^{(3)} = c_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} + \cancel{c_3^- e^{q_1 x/\hbar}} \qquad x > 0$$

CONDIZ. DI RACCORDO: continuità di ψ_E

$$\psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(3)}(0) \quad \to \quad c_1^- = c_3^+ \overset{\text{def.}}{\equiv} \xi$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \xi e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \xi e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi'' + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi = E\underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi}_{\downarrow\, 0} \qquad \epsilon \to 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right] = -\int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi = \alpha\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\psi(x)\,dx = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\psi(x)\,dx$$

$$= \alpha\,\psi(0)$$

$$\Rightarrow \delta\psi'\big|_{x=0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

Imponiamo queste condiz. alla soluzione trovata (*).

$$\psi'_E = \begin{cases} \frac{q_1 \xi}{\hbar} e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ -\frac{q_1 \xi}{\hbar} e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta \psi'_E \Big|_{x=0} = \frac{2 q_1 \xi}{\hbar} \leftarrow \text{dev'essere} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot \overset{\psi(0)}{\overset{\shortparallel}{\xi}}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m\alpha}{\hbar} \xrightarrow[q_1 = \sqrt{2m|E|}]{} \boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}$$

$\Longrightarrow$ c'è un solo autovalore dell'energia che risolve l'eq. di Sch. (per $E<0$)

Normalizziamo la funzione d'onda (autostato ψ_E relativo a $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$)

$$\psi_E = \begin{cases} \xi e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \xi e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases}$$

(autofunzione PARI e REALE)

Cerchiamo ξ t.c. $\| \psi_E \|^2 = 1$

$$\| \psi_E \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2|\xi|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2q_1 x/\hbar} dx =$$

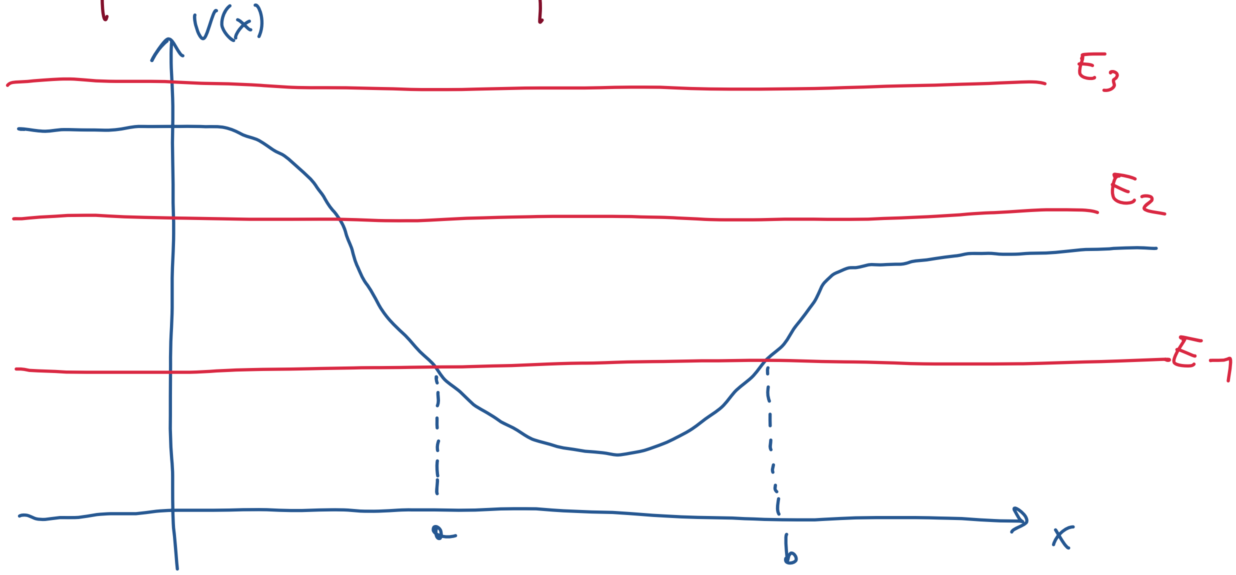
$$= 2|\xi|^2 \left[-\frac{\hbar}{2q_1} e^{-2q_1 x/\hbar} \right]_0^{+\infty} = \frac{\hbar}{q_1} |\xi|^2 = \frac{\hbar^2}{m\alpha} |\xi|^2 = 1 \text{ se}$$

$$q_1 = \sqrt{2mE} = \frac{m\alpha}{\hbar}$$

$$|\xi|^2 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

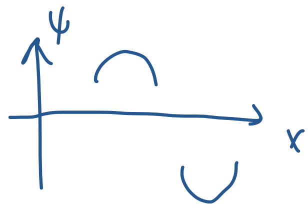
cioè $\xi = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$ (a meno di una fase)

Extra: Studio qualitativo dell' eq. di Sch. 1 dim.

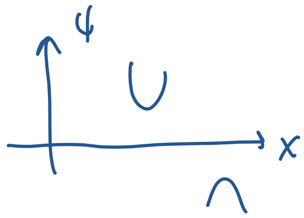


$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi$$

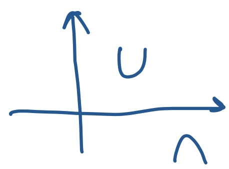
- $E > V$



- $E < V$



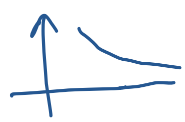
Caso E_1) $x < a$ $x > b$



, cioè

$\psi(x)$ o si allontana ~~indefinitam.~~ dall'asse x

o vi tende asintoticam. a zero



(quindi $\psi'' \to 0$)

⇒ due condiz. di accettab. su solut. di eq. diff. del 2° ord. ⇒ CONDIZIONE SULL'ENERGIA

⇝ spettro discreto e stati legati

Caso E_2) condiz. di limitatezza a sinistra

$\rightarrow$ SPETTRO CONTINUO ma NON-DEG.

Caso E_3) SPETTRO CONTINUO DEGENERE (per ogni valore di E ci sono due soluz. indip. dell'eq. di Sch.).