

# STRUTTURA DEL PROTONE E QCD

[PS-14, 17]

## INTRODUZIONE

Abbiamo visto che il protone (come tutti gli adroni) è uno stato composto da quark e antiquark, tenuti insieme dallo scambio di gluoni - interazione descritta dalla QCD. A basse energie l'accoppiamento è forte, mentre ad alte energie diventa debole (libertà asintotica). Abbiamo usato questo fatto per calcolare  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$ , senza dover descrivere le interazioni forti nello stato finale.

Come si è arrivati a questa conoscenza?

Un passo cruciale furono gli esperimenti di "Deep Inelastic Scattering" effettuati a SLAC ('60s).

Un fascio di elettroni di  $E \sim 20$  GeV veniva fatto collidere con un bersaglio di idrogeno (protoni) e veniva misurato l'angolo di scattering di questi elettroni.

Per angoli grandi il momento trasferito al protone è grande ed il protone viene disintegrato (scattering inelastico).

Si trova che il contributo maggiore alla sezione d'urto veniva da questa regione inelastica.

Bjorken e Feynman spiegano questo fenomeno con il **MODELLO A PARTONI**: il protone era composto di un numero piccolo di fermioni elementari (partoni), con carica elettrica, tenuti assieme dalle interazioni forti ma incapaci di scambiarsi grandi momenti con queste interazioni.

Nella regione di scattering inelastico questi partoni potevano essere trattati come stati liberi.

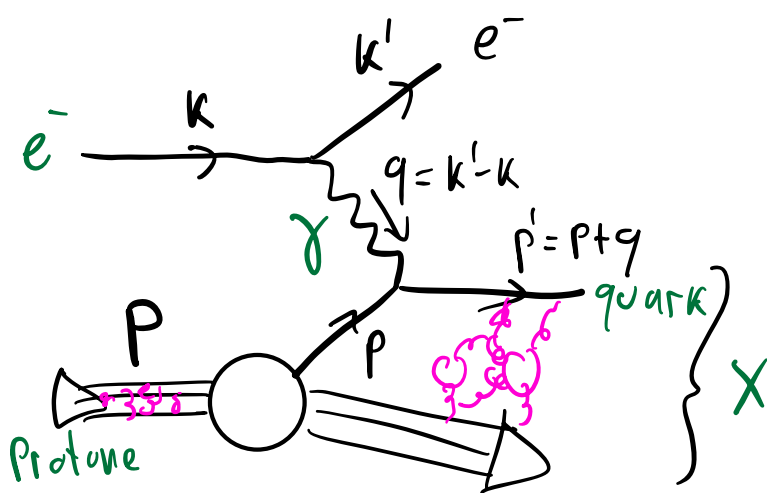
Conciliare il fatto che le interazioni forti erano forti a basse energie ma poi diventavano trascurabili a grandi energie venne spiegato con il gruppo di rinormalizzazione e con la

**libertà asintotica**.

La teoria delle interazioni forti doveva quindi essere una teoria di gauge non abeliana con libertà asintotica: la **QCD**

[t Hooft, Politzer, Gross, Wilczek '70s]

# Deep Inelastic Scattering



Studiamo lo scattering di un elettrone di momento iniziale  $k$  e finale  $k'$  su un protone con momento  $P$ .

Il momento scambiato  $e^-$   $q = k' - k$ ,  $e^-$  un vettore timelike:  $q^2 \equiv -Q^2 < 0$ .

Per  $Q^2 \gg m_p^2$ , nel modello a partoni il fotone vede la struttura interna del protone e lo scattering avviene con un quark  $q_i$ .

In questo limite il momento fornito al quark non può essere bilanciato dallo scambio di gluoni soffici all'interno del protone e quest'ultimo si disintegra.

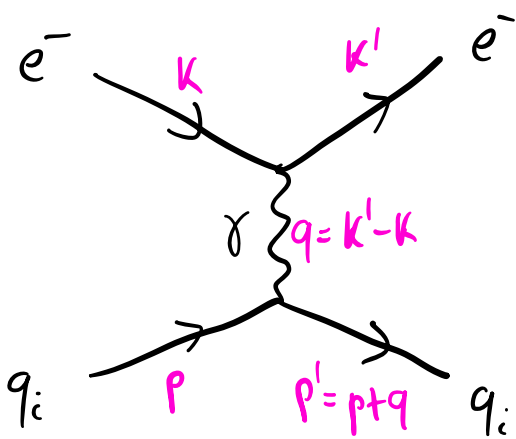
Lo scambio di gluoni, quark e antiquark soffici però neutralizza il colore dello stato finale, che diventa un getto di adroni con grande massa invariante

$M_X^2 \gg m_p^2$ . Questo è il processo di **deep inelastic scattering**.

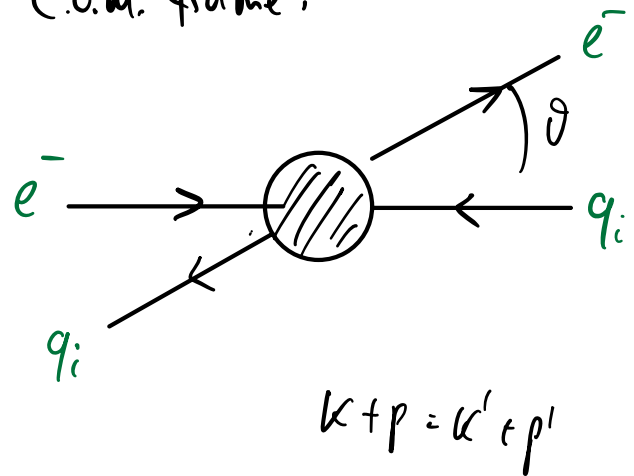
Calcoliamo la sezione d'urto **PARTONICA**

per il processo:  $e^-(k) q_i(p) \rightarrow e^-(k') q_i(p')$ .

Trascuriamo tutte le masse:  $m_e^2, m_q^2, m_p^2 \ll Q^2$ .



C.o.m. frame:



L'interazione  $e^-$  dovuta allo scambio di un fotone (QED).

Si trova: 
$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = 2e^4 Q_i^2 \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right), \quad (*)$$

dove  $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$  sono le variabili di Mandelstam

$$\hat{s} = (k+p)^2 = (k'+p')^2, \quad \hat{t} = (k'-k)^2 = (p-p')^2, \quad \hat{u} = (k'-p)^2 = (p'-k)^2.$$

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0 \quad (\text{trascuriamo le masse di } e^- \text{ e dei quark}).$$

Esercizio: Calcolare  $M$  e  $\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M|^2$ .

(\*) È come il calcolo di  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  con  $s \leftrightarrow t$

La sezione d'urto differenziale (partonica)  $e^-$ :

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{16\pi} 2e^4 Q_i^2 \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{t}^2} \right)$$
$$= \frac{\pi \alpha^2 Q_i^2}{\hat{s}} \left( \frac{\hat{s}^2 + (\hat{t} + \hat{s})^2}{\hat{t}^2} \right)$$

Cambiando variabile  $\hat{t} = -\frac{\hat{s}}{2}(1 - \cos\theta) \rightarrow \frac{d\hat{t}}{d\cos\theta} = \frac{\hat{s}}{2}$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} = \frac{2\pi \alpha^2 Q_i^2}{\hat{s}^2} \left( \frac{\hat{s}^2 + (\hat{t} + \hat{s})^2}{\hat{t}^2} \right)$$

Esprimiamola in termini di variabili misurabili,

Il momento trasferito  $q$   $e^-$  misurabile dai momenti degli elettroni iniziale e finale:

$$q = k' - k \Rightarrow \hat{t} = q^2 = (k' - k)^2 = -\frac{\hat{s}}{2}(1 - \cos\theta) < 0$$

$$\Rightarrow \hat{t} = q^2 = -Q^2, \quad Q^2 > 0.$$

$\hat{S}$  invece coinvolge il momento del partone, che non è osservabile.

I costituenti del protone hanno un momento tipico, nel sistema a riposo del protone, di ordine  $\Lambda_{QCD}$ .

Assumiamo che l'energia del centro di massa sia  $\gg m_p, \Lambda_{QCD}$  e quindi che

tutti i partoni hanno un momento collineare a quello del protone.

Chiamiamo  $p = \xi P$

$\xi$ : frazione longitudinale del partone  $0 < \xi < 1$

Ciascuna specie di partone di tipo "i" avrà una PROBABILITÀ  $f_i(\xi)$  di avere una frazione longitudinale  $\xi$ .

$$\left( \begin{array}{l} \text{PROBABILITÀ DI TROVARE UN} \\ \text{PARTONE } i \text{ CON FRAZIONE } \xi \end{array} \right) = f_i(\xi) d\xi$$

$f_i(\xi)$ : FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE PARTONICA (PDF)

La SEZIONE D'URTO totale sarà data dall'integrale su tutti i possibili valori di  $\xi$ :

$$\sigma(e^-(k) p(P) \rightarrow e^-(k') + X) = \int_0^1 d\xi \sum_i f_i(\xi) \hat{\sigma}(e^-(k) q_i(\xi P) \rightarrow e^-(k') q_i(p'))$$

Torniamo alla variabile  $\hat{S}$ .

$$\hat{S} = (k+p)^2 = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi(P+k)^2 = \xi S,$$

s è l'energia del centro di massa dell'elettrone e protone.

$$(p')^2 = 0 = (p+q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = 2\xi P \cdot q - Q^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \equiv x$$

→ può essere calcolato a partire dai momenti dell'elettrone e del protone.

Per ogni evento posso quindi calcolare  $Q^2$  e  $x$  misurando il momento dell'elettrone scatterato.

Dato che  $\xi = x$  questi vengono spesso utilizzati intercambiabilmente.  $x$  è più utilizzato.

Differenziando  $\sigma$  in  $x = \xi$  e  $Q^2 = -\hat{t}$  troviamo:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx} = \sum_i f_i(x) Q_i^2 \frac{2\pi d^2}{Q^4} \left( 1 + \left( 1 - \frac{Q^2}{xS} \right)^2 \right),$$

limite cinematico:  
 $xS \geq Q^2$

- Il fatto che  $f_i(x)$  sia **INDIPENDENTI DA  $Q^2$**  è chiamato "**Bjorken scaling**". Equivale a dire che i partoni sono puntiformi e che la struttura del protone è indipendente dall'energia con la quale viene testata.

Il Bjorken scaling è ottenuto all'ordine zero nelle correzioni in  $\alpha_s$ . La scala di energia tipica è  $Q^2$  quindi conta  $\alpha_s(Q^2)$  che, per  $Q^2 \gg m_p^2$ , è perturbativo.

Le correzioni di QCD comportano una piccola **violazione** (logaritmica in  $Q^2$ ) di questo scaling:

$$O(\alpha_s^{(0)}) : f_i(x) \longrightarrow O(\alpha_s) : f_i(x, \log \frac{Q^2}{Q_0^2}).$$

- Il fattore  $\left(1 + \left(1 - \frac{Q^2}{xS}\right)^2\right)$  è tipico dello scattering di elettroni su FERMIONI A MASSA NULLA.

Questo fu evidenza che **i partoni sono fermioni** con una massa piccola.

- La sezione d'urto di DIS è proporzionale alla somma  $\sigma_{DIS} \propto \sum_i f_i(x) Q_i^2$ , quindi non è sufficiente per estrarre tutte le individuali funzioni  $f_i(x)$ .



# DIS con neutrini

Supponiamo di avere un fascio energetico di neutrini. Tipicamente sono  $\nu_\mu$  o  $\bar{\nu}_\mu$  derivanti da un fascio di protoni che urta una targhetta, producendo un getto di pioni e kaoni, che decadono

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \quad \text{o} \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu.$$

Possiamo studiare lo scattering in corrente carica di questi neutrini su protoni:

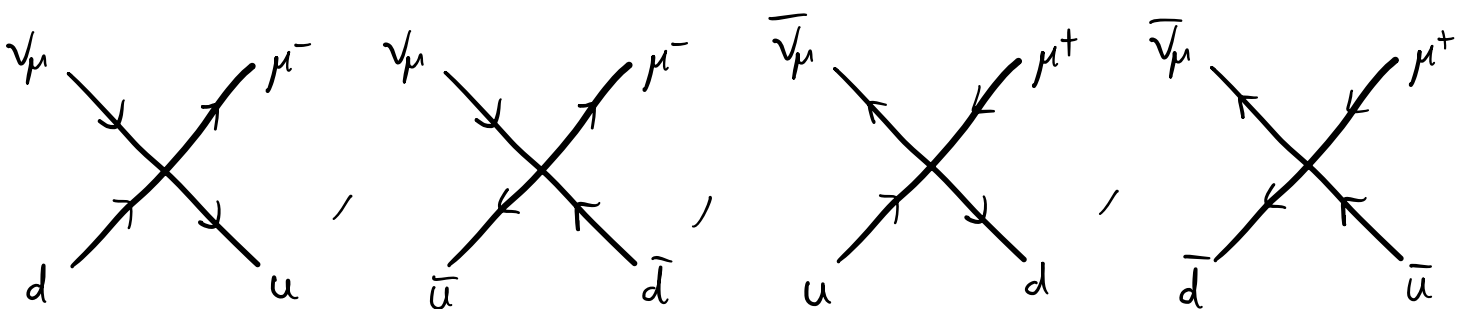
$$\nu_\mu p \rightarrow \mu^- + X, \quad \bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ + X.$$

Conoscendo il momento dei neutrini nel fascio e misurando quello dei  $\mu^\pm$  la cinematica è come per il DIS con elettroni.

A livello partonico, la Lagrangiana di interazione è quella di Fermi (per  $Q^2 \ll M_W^2$ )

$$\mathcal{L}_{cc}^{\text{Fermi}} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left( \bar{\mu} \gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} \nu_\mu \right) \left( \bar{u} \gamma^\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} d \right) + \text{h.c.}$$

Abbiamo 4 processi diversi:



La sezione d'urto relativa a questi processi è analoga a quella della QED ma con il propagatore del fotone sostituito da  $W_\omega$ :  $\hat{t}^2 \rightarrow M_W^4$ , con  $e^2 \rightarrow \frac{g^2}{2}$  e separando i contributi delle chiralità LH e RH:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} (\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u) = \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} (\bar{\nu}_\mu \bar{d} \rightarrow \mu^+ \bar{u}) = \frac{g^4}{32\pi \hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2}{M_W^4} = \frac{G_F^2}{\pi} \\ \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} (\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d) = \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} (\nu_\mu \bar{u} \rightarrow \mu^- \bar{d}) = \frac{g^4}{32\pi \hat{s}^2} \frac{(\hat{s} + \hat{t})^2}{M_W^4} = \frac{G_F^2}{\pi} \left(1 + \frac{\hat{t}}{\hat{s}}\right)^2 \end{cases}$$

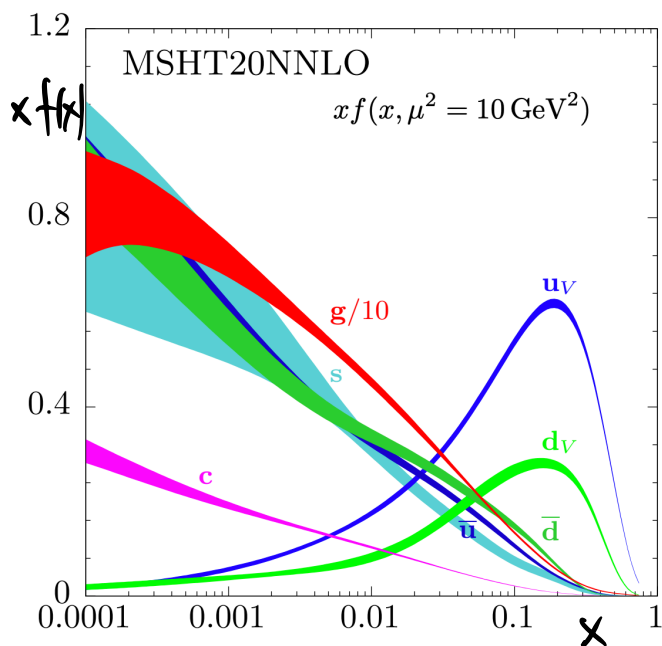
La sezione d'urto fisica  $\bar{\sigma}$  è ottenuta moltiplicando queste per le PDF dei quark iniziali nel protone:

$$DIS_\nu \begin{cases} \frac{d^2\bar{\sigma}}{dQ^2 dx} (\nu_\mu P \rightarrow \mu^- X) = \frac{G_F^2}{\pi} \left[ f_d(x) + f_{\bar{u}}(x) \left(1 - \frac{Q^2}{xS}\right)^2 \right] \\ \frac{d^2\bar{\sigma}}{dQ^2 dx} (\bar{\nu}_\mu P \rightarrow \mu^+ X) = \frac{G_F^2}{\pi} \left[ f_{\bar{d}}(x) + f_u(x) \left(1 - \frac{Q^2}{xS}\right)^2 \right] \end{cases}$$

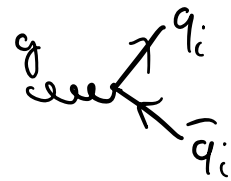
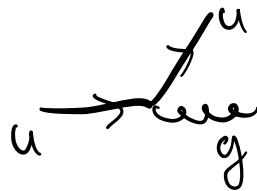
Con queste  $\bar{\sigma}$  è possibile misurare separatamente le diverse PDFs.

# FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE PARTONICHE

Le  $f_i(x)$  non sono calcolabili da principi primi dato che derivano dalla fisica non perturbativa del protone. Possono solamente essere misurate sperimentalmente.



Il protone è composto da 3 quark di valenza:  $u, u, d$ .  
Tramite la QCD, ci saranno anche PDF di gluoni e altre coppie  $q_i + \bar{q}_i$ . Queste sono chiamate PDF del mare ("sea"):



Separiamo il contributo di valenza da quello del

mare:  $f_u(x) = f_u^v(x) + f_u^{sea}(x)$ ,  $f_d(x) = f_d^v(x) + f_d^{sea}(x)$ .

Gli altri quark e antiquark hanno solo contributo del mare.

• Per quark di massa trascurabile, dall'universalità delle interazioni di QCD ci aspettiamo:

$$f_{\bar{u}}(x) = f_u^{sea}(x) \approx f_{\bar{d}}(x) = f_d^{sea}(x) \approx f_s(x) = f_{\bar{s}}(x).$$

• Le  $f_u^v(x)$  e  $f_d^v(x)$  sono grandi a grandi  $x$  perché i quark di valenza portano una grande frazione del momento del protone e  $f_u^v(x) \approx 2 f_d^v(x)$ .

• Le PDF sono densità di probabilità per i vari costituenti del protone e quindi devono riflettere i numeri quantici del protone:

$$\int_0^1 dx f_u^v(x) = \int_0^1 dx (f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)) = 2$$

$$\int_0^1 dx f_d^v(x) = \int_0^1 dx (f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)) = 1$$

• Il momento totale portato dai partoni deve essere uguale al momento del protone:

$$\int_0^1 dx \sum_i x f_i(x) = 1$$

# SCATTERING PROTONE-PROTONI

In collisioni di adroni ad alte energie, quelle di gran lunga più frequenti coinvolgono interazioni soffici tra i partoni e sono non perturbative perché  $d_s$  è grande a piccoli momenti (urti soffici).

A volte però il momento scambiato tra partoni è grande e, come in DIS, le interazioni dure avvengono prima che la QCD nel protone abbia il tempo di intervenire. Possiamo quindi trattare i partoni come stati liberi, come fatto in DIS.

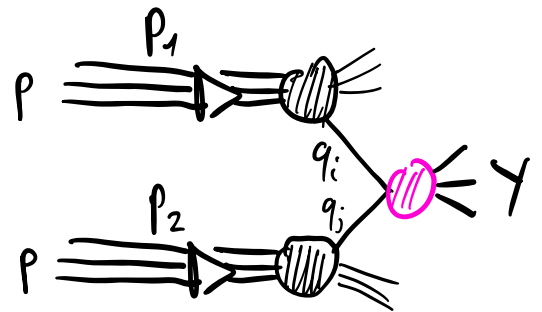
Le PDF saranno le stesse che in DIS.

Per una collisione dura con stato finale  $\gamma$  (più qualsiasi stato adronico  $X$ ) avremo quindi:

$$\sigma(p(P_1) + p(P_2) \rightarrow \gamma + X) =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_i \sum_j f_i(x_1) f_j(x_2) \hat{\sigma}(q_i(x_1 P) q_j(x_2 P) \rightarrow \gamma)$$

dove  $q_{i,j}$  possono essere quark, antiquark o gluoni.

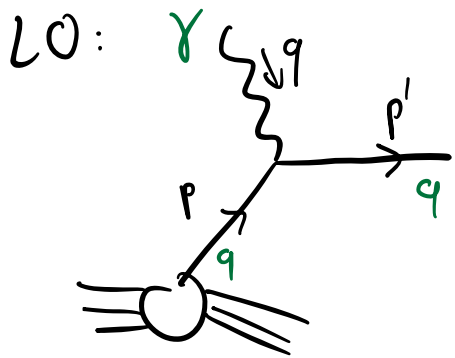


# EVOLUZIONE DELLE PDF [Mangano "Intro to QCD"]

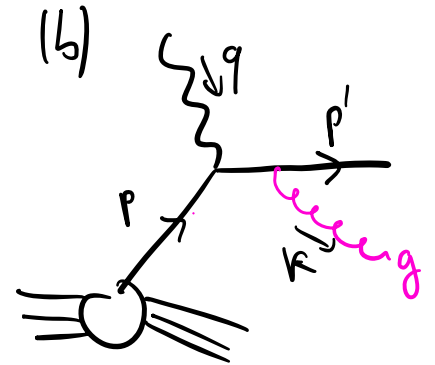
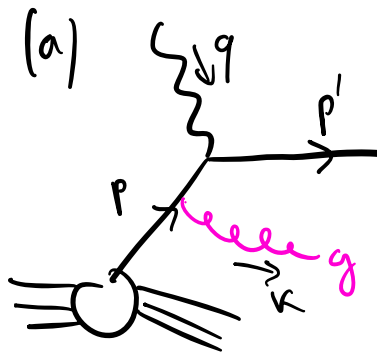
Il Bjorken scaling, ovvero il fatto che  $f_i(x)$  non dipendono da  $Q^2$  è valido solamente nel limite in cui i partoni sono liberi.

Consideriamo ora le **correzioni di QCD**, perturbative dato che l'accoppiamento  $\alpha_s(Q^2)$  è perturbativo a grandi energie  $Q^2 \gg m_p^2$ .

**ORDINE LEADING (LO):**



**ORDINE NEXT-TO-LEADING (NLO):**



Il diagramma (a) ha un propagatore fermionico

$$\propto \frac{1}{(p-k)^2} = \frac{-1}{2p \cdot k} \rightarrow p \cdot k = p^0 k^0 (1 - \cos\theta) \begin{cases} \xrightarrow{\cos\theta=1} 0 \\ \xrightarrow{k^0=0} 0 \end{cases}$$

diverge per  $k$  parallelo a  $p$  (divergenza collineare)  
e diverge per  $k^0 \rightarrow 0$  (divergenza soffice).

Anche il diagramma (b) ha queste divergenze.

Quando sommo su tutti gli stati finali adronici  $X$ , le divergenze in (b) si cancellano con

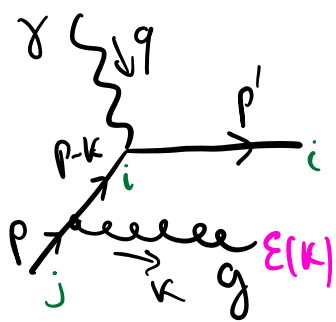
quelle della "self-energy" del quark nello stato finale  $(\rightarrow \text{quark} \rightarrow p')$  e sommando su tutti gli stati  $X$ .

Anche la divergenza soffice in (a) si cancella con la self-energia del quark nello stato iniziale.

La divergenza collineare in (a) invece è fisica: per il fotone cambia se  $q$  ha emesso un gluone o meno.

Calcoliamo questo contributo alla sezione d'urto

$i, j = \text{indice di colore}$



$$M_g = i g_s T_{ij}^A \bar{u}(p') \Gamma \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2} \gamma_\alpha u(p) \epsilon^\alpha(k)$$

$\Gamma$  indica il vertice di interazione col fotone di momento  $q$ . Lo teniamo generico perché vogliamo assicurarci che l'emissione del gluone sia UNIVERSALE, ovvero non dipende dai dettagli dell'interazione dura. Solo in questo modo le PDF saranno UNIVERSALI.

Per calcolare  $(p-k)^2$  conviene scegliere una buona parametrizzazione per  $k^\mu$ . A noi interessa la regione dove  $k$  è parallelo a  $p$  (divergenza collineare).

Scegliamo quindi:  $k_\mu = (1-z)p_\mu + \beta p'_\mu + (k_\perp)_\mu$

dove  $p \cdot k_\perp = p' \cdot k_\perp = 0$ .

$$k^2 = 0 = 2\beta(1-z)p \cdot p' + k_\perp^2 \stackrel{?}{=} -k_t^2 \rightarrow \beta = \frac{k_t^2}{2(1-z)p \cdot p'}$$

$$\Rightarrow k_\mu = (1-z)p_\mu + \frac{k_t^2}{2(1-z)p \cdot p'} p'_\mu + (k_\perp)_\mu$$

Abbiamo quindi

$$k \cdot p = \beta p \cdot p' = \frac{k_t^2}{2(1-z)} \quad \text{e} \quad k \cdot p' = (1-z)p \cdot p'$$

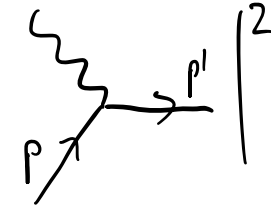
$$\Rightarrow (p-k)^2 = 2k \cdot p = \frac{k_t^2}{1-z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(p-k)^2} = \frac{1-z}{k_t^2}$$

$k_t^2 \rightarrow 0$  è il limite di divergenza collineare

Sommando sulle polarizzazioni e sul colore del gluone  $|M_0|^2$  e scegliendo una gauge utile per trattare le  $\epsilon_\alpha(k)$  si ottiene:

$$\sum |M_0|^2 = 2g_s^2 C_F \frac{1-z}{k_t^2} \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right) N_c \text{Tr}[\not{p}' \not{M} \not{p} \not{M}^\dagger] + O(k_t^2)$$



Il termine  $N_c \text{Tr}[\not{p}' \not{M} \not{p} \not{M}^\dagger]$  corrisponde a  $\sum |M_0|^2$  

quindi l'emissione del gluone si fattorizza nel limite collineare  $k_t \rightarrow 0$ .

Aggiungendo il fattore dello spazio delle fasi del gluone troviamo il contributo di questo processo a quanto trovato senza questa emissione:

$$[dk] \equiv \frac{d^3k}{2k^0 (2\pi)^3} = \frac{dk_{\parallel}}{k^0} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{8\pi^2} \frac{dk_t^2}{2} = \frac{dz}{(1-z)} \frac{1}{16\pi^2} dk_{\perp}^2$$

$$\Rightarrow \sum |M_0|^2 [dk] = \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} dz \left( \frac{\alpha_s}{2\pi} \right) P_{qq}(z) \left( \sum |M_0|^2 \right)$$

dove  $P_{qq}(z) \equiv C_F \frac{1+z^2}{1-z}$  è la "splitting function"

corrispondente alla transizione  $q \rightarrow q$  con l'emissione di un gluone collineare.

$z$  è la frazione longitudinale del momento del quark originale rimasta al quark dopo l'emissione del gluone:  $(p-k)_{\mu} = z p_{\mu} + \mathcal{O}(k_t^2)$ .


Dato che il quark finale  $e^-$  on-shell:

$$(p')^2 = 0 \rightarrow |p-k+q|^2 \approx (zP+q)^2 = (zx_i P + q)^2 =$$

$$= 2zx_i q \cdot P + q^2 = 0 \Rightarrow x_i = \frac{1}{z} \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{x}{z}$$

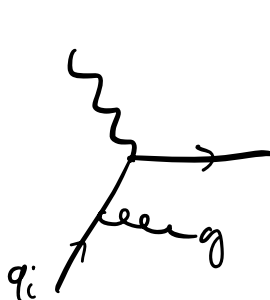
$\Rightarrow$  Il partone iniziale aveva una frazione longitudinale pari a  $x_i = \frac{x}{z}$  ( $x$   $e^-$  quello definito in DIS).

Se il contributo del partone  $q_i$  alla sezione d'urto DIS senza l'emissione del gluone (da  $M_0^2$ ) lo parametrizziamo con:



$$\Rightarrow \frac{dV_0^{(i)}}{dQ^2 dx} = f_i(x) \hat{V}_0$$

ora abbiamo trovato:



$$\Rightarrow \frac{dV_0^{(i)}}{dQ^2 dx} = \hat{V}_0 \frac{\alpha_S}{2\pi} \int \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}\right)$$

Corrisponde ad avere ridefinito:

$$f_i(x) \rightarrow f_i(x) + \frac{\alpha_S}{2\pi} \int \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}\right)$$

L'integrale in  $dk_{\perp}^2$  andrebbe da 0 a  $Q^2$ .

Se avessimo tenuto la massa del quark avremmo

$\int_{k_{\perp}^2 - m_q^2}^{k_{\perp}^2}$ , quindi  $m_q$  sarebbe un cutoff infrarosso.

Pero il quark nel protone non è on-shell e non sappiamo

a cosa corrisponderebbe  $m_q$ . Usiamo quindi un **cutoff infrarosso ad una certa scala  $\mu_0$** :  $\int_{\mu_0^2}^{Q^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} = \log \frac{Q^2}{\mu_0^2}$

Otteniamo la PDF "effettiva":

$$f_i(x) \rightarrow f_i(x, Q^2) = f_i(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu_0^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}\right)$$

Rimuoviamo la dipendenza dalla scala non perturbativa  $\mu_0$  esprimendo  $f_i(x, Q^2)$  in termini della PDF MISURATA ad una certa scala  $\mu^2$ :

$$f_i(x, \mu^2) = f_i(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$\Rightarrow f_i(x, Q^2) = f_i(x, \mu^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}\right)$$

Questo approccio è analogo alla rinormalizzazione di un accoppiamento in termini di quello misurato ad una certa scala.

Imponendo l'indipendenza della fisica rispetto alla scelta della scala  $\mu^2$  troviamo:  $f_i(\frac{x}{z}, \mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s)$

$$\mu^2 \frac{df_i(x, \mu^2)}{d\mu^2} \equiv 0 = \mu^2 \frac{df_i(x, \mu^2)}{d\mu^2} - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right)$$

$$\Rightarrow \mu^2 \frac{df_i(x, \mu^2)}{d\mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_i\left(\frac{x}{z}, \mu^2\right)$$

Questa è l'equazione di **DGLAP**

"Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi"

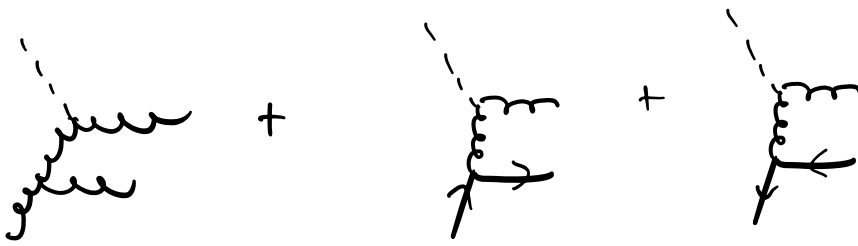
La soluzione di questa equazione differenziale **risomma tutti i "leading logs"** (ovvero tutte le potenze  $(\alpha_s \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2})^n$ ). Questo equivale a sommare tutte le emissioni multiple di un numero arbitrario di gluoni:

Allo stesso ordine in  $\alpha_s$  del diagramma



ovvero un gluone che si trasforma in una coppia  $q+\bar{q}$ .  
Anche questo darà un contributo a  $f_q(x, \mu^2)$ , ma  
proporzionale alla PDF del gluone  $f_g(x, \mu^2)$ .

Per completare il sistema dobbiamo anche descrivere  
l'evoluzione della PDF del gluone e degli antiquark:



Equazioni DGLAP:  $t \equiv \log \frac{\alpha^2}{\mu^2}$

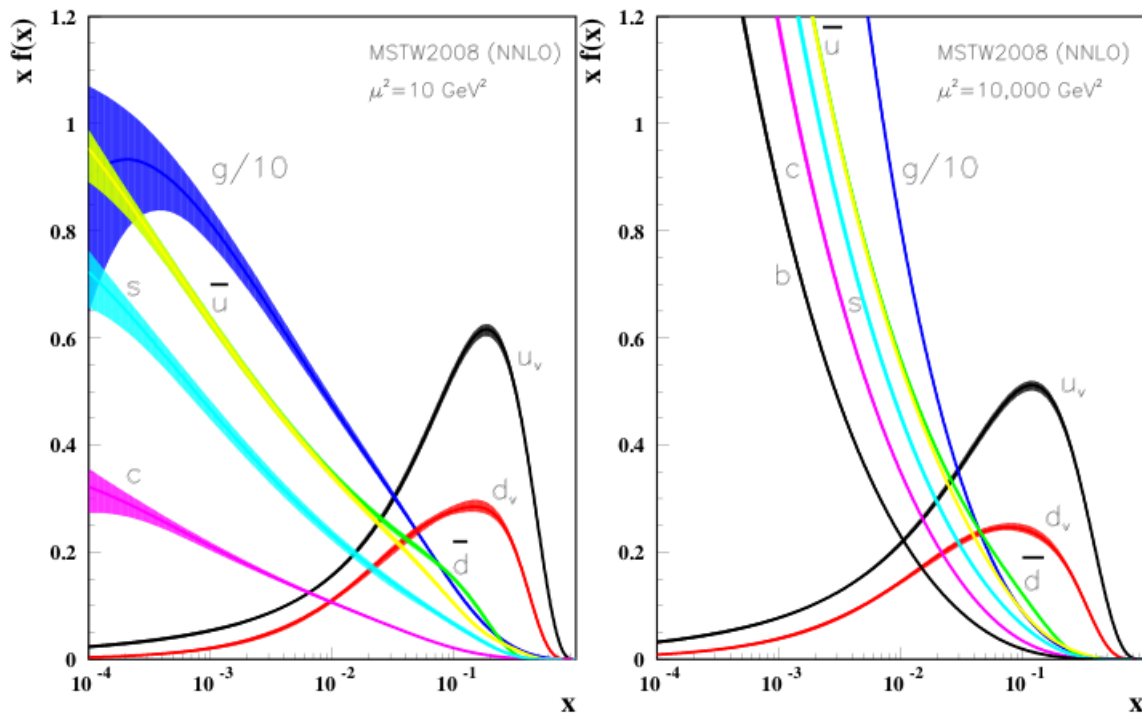
$$\frac{d f_q(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ P_{qq}(z) f_q\left(\frac{x}{z}, t\right) + P_{qg}(z) f_g\left(\frac{x}{z}, t\right) \right]$$

$$\frac{d f_{\bar{q}}(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ P_{q\bar{q}}(z) f_{\bar{q}}\left(\frac{x}{z}, t\right) + P_{qg}(z) f_g\left(\frac{x}{z}, t\right) \right]$$

$$\frac{d f_g(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ P_{gg}(z) f_g\left(\frac{x}{z}, t\right) + P_{gq}(z) \left( f_q\left(\frac{x}{z}, t\right) + f_{\bar{q}}\left(\frac{x}{z}, t\right) \right) \right]$$

$$P_{q\bar{q}} = \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2), \quad P_{qq}(z) = P_{q\bar{q}}(1-z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad P_{gg}(z) = 2C_A \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right]$$

Example of the evolution of PDFs of a proton from  $\mu \simeq 3 \text{ GeV}$  to  $\mu = 100 \text{ GeV}$ :



**Figure 16.4:** Distributions of  $x$  times the unpolarized parton distributions  $f(x)$  (where  $f = u_v, d_v, \bar{u}, \bar{d}, s, c, b, g$ ) and their associated uncertainties using the NNLO MSTW2008 parameterization [13] at a scale  $\mu^2 = 10 \text{ GeV}^2$  and  $\mu^2 = 10,000 \text{ GeV}^2$ .

- A piccole scale i quark di valenza dominano e i quark pesanti (c e b) hanno un contributo molto piccolo (zero per b dato che  $m_b \simeq 4.2 \text{ GeV} > 3 \text{ GeV}$ ).
- A grandi scale il contributo del mare è molto più grande e le PDF dei quark pesanti diventa rilevante.