4.10 Dualità e sistemi lineari

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto l'equazione cartesiana di un iperpiano $H:\ a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_K$. Chiaramente questa non è unica: più precisamente, i suoi coefficienti sono determinati a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Dunque un iperpiano non individua una $(n+1)$-upla di K^{n+1} bensì infinite $(n+1)$-uple proporzionali, cioè un *punto* di $\mathbb{P}^n_K$.

Ad esempio, se r è una retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana

$$r:\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

essa individua *univocamente* il punto di $\mathbb{P}^2$ dato da $[a_0, a_1, a_2]$.

È chiaro, inoltre, che le coordinate omogenee del punto $[a_0, a_1, a_2]$ dipendono dall'equazione di r e dunque dal riferimento proiettivo che si è fissato nel piano contenente r.

Per evitare confusione, useremo una notazione e una denominazione diversa per lo spazio proiettivo di dimensione 2 a cui appartiene $[a_0, a_1, a_2]$.

Definizione 4.10.1. Il piano proiettivo i cui punti rappresentano, come sopra, tutte le rette di $\mathbb{P}^2_K$ si dice *piano proiettivo duale* e si denota con $(\mathbb{P}^2_K)^*$ (equivalentemente, si può definire come $\mathbb{P}((K^3)^*)$).

Esplicitamente: se $\mathbb{P}^2_K$ è dotato di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, a una retta r di $\mathbb{P}^2_K$ corrisponde il punto r^* di $(\mathbb{P}^2_K)^*$ secondo la seguente corrispondenza (ovviamente biunivoca)

$$\delta:\quad \{\text{rette di } \mathbb{P}^2_K\} \quad \longleftrightarrow \quad (\mathbb{P}^2_K)^*$$

definita da

$$r:\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad r^* = [a_0, a_1, a_2].$$

Scambiando i ruoli di $\mathbb{P}^2_K$ e $(\mathbb{P}^2_K)^*$ (o, equivalentemente, di punti e rette), è naturale definire un'altra corrispondenza, anch'essa biunivoca,

$$\delta^*:\quad \mathbb{P}^2_K \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{rette di } (\mathbb{P}^2_K)^*\}$$

definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, z_1, z_2]$ di $(\mathbb{P}^2_K)^*$)

$$P = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \quad \longleftrightarrow \quad P^*:\ \alpha_0z_0 + \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 = 0$$

Definizione 4.10.2. Le due corrispondenze δ e δ^* sopra definite costituiscono la *relazione di dualità* fra $\mathbb{P}^2_K$ e $(\mathbb{P}^2_K)^*$.

Esempio 4.10.1. Il punto che rappresenta la retta $r: 2x_0 - x_1 + 5x_2 = 0$ è $r^* = [2, -1, 5] \in (\mathbb{P}^2)^*$. La retta che rappresenta il punto $P = [3, 0, 1]$ è la retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ di equazione $P^*:\ 3z_0 + z_2 = 0$.

Nella relazione di dualità si mantengono la relazione di appartenenza e quella di inclusione, ma i "soggetti" vengono scambiati. Lasciamo per esercizio la dimostrazione delle semplici proprietà elencate qui di seguito.

Proposizione 4.10.1. *Se P è un punto e r una retta di $\mathbb{P}^2_K$ allora*

$$P \in r \iff r^* \in P^*.$$

Se A e B sono due punti distinti e r è una retta di $\mathbb{P}^2_K$ allora

$$A, B \in r \iff r^* = A^* \cap B^*.$$

Se P è un punto e r e s sono due rette distinte di $\mathbb{P}^2_K$ allora

$$P = r \cap s \iff r^*, s^* \in P^*.$$

Dalla prima proprietà segue immediatamente che le rette di un fascio di rette di centro P sono rappresentate da tutti e soli i punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$. Questo rende precisa la frase "$\mathcal{F}_P$ è un insieme di ∞^1 rette".

Osservazione 4.10.1. Dalla terza proprietà segue che le rette del fascio $\mathcal{F}_P$, generato da r e s, corrispondono ai punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$ passante per i punti r^* e s^*. Esplicitamente: si consideri il fascio di rette di centro P in $\mathbb{P}^2$

$$\mathcal{F}_P : \; \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0.$$

Allora tutte e sole le rette di $\mathcal{F}_P$ sono rappresentate dai punti di $(\mathbb{P}^2)^*$ appartenenti alla retta P^* passante per i punti $[a_0, a_1, a_2]$ e $[b_0, b_1, b_2]$.
Più precisamente, se $r_{\lambda,\mu} \in \mathcal{F}_P$ il punto corrispondente nel piano duale è $\lambda[a_0, a_1, a_2] + \mu[b_0, b_1, b_2]$.

Esempio 4.10.2. Vogliamo rappresentare in $(\mathbb{P}^2)^*$ le rette del fascio di centro $P = [1, 2, 3]$, sia in forma cartesiana che in forma parametrica.
Come visto, l'insieme richiesto è una retta del piano duale. Per ottenere la sua equazione cartesiana basta osservare che tale retta è

$$P^* : \; z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0.$$

D'altro canto, due rette passanti per P sono, ad esempio $x_1 - 2x_0 = 0$ e $x_2 - 3x_0 = 0$. Prendendo tali rette come generatori del fascio, abbiamo

$$\mathcal{F}_P : \; \lambda(x_1 - 2x_0) + \mu(x_2 - 3x_0) = 0.$$

Quindi P^* è la retta passante per $[-2, 1, 0]$ e $[-3, 0, 1]$, cioè

$$P^* : \; [z_0, z_1, z_2] = \lambda[-2, 1, 0] + \mu[-3, 0, 1]$$

e questa è l'equazione parametrica richiesta.

Infine osserviamo che le rette di $\mathcal{F}_P$ si ottengono da tutte le rette di $\mathbb{P}^2$ imponendo la *condizione lineare* di passaggio per P. Nell'esempio precedente $P = [1, 2, 3]$ e si impone alla generica retta del piano

$$r: \; z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0$$

la condizione lineare

$$z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0,$$

che, come visto, è l'equazione cartesiana di P^*. Quindi i parametri omogenei $[z_0, z_1, z_2]$ devono soddisfare un'equazione lineare omogenea.
Risolvendo tale equazione, ad esempio ricavando $z_0 = -2z_1 - 3z_2$, si ottiene la generica retta del fascio di centro P (avendo posto $\lambda := z_1$ e $\mu := z_2$):

$$r_{\lambda,\mu}: \; (-2\lambda - 3\mu)x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2 = 0.$$

In modo del tutto analogo, si definisce lo *spazio proiettivo duale* di $\mathbb{P}^n_K$ e si denota con $(\mathbb{P}^n_K)^*$. Come prima, si pone la *relazione di dualità* fra $\mathbb{P}^n_K$ e $(\mathbb{P}^n_K)^*$ stabilita da δ e δ^*, dove

$$\delta: \quad \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^n_K\} \quad \longleftrightarrow \quad (\mathbb{P}^n_K)^*$$

è definita da

$$H: \; a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \longleftrightarrow \quad H^* = [a_0, \ldots, a_n].$$

e

$$\delta^*: \quad \mathbb{P}^n_K \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{iperpiani di } (\mathbb{P}^n_K)^*\}$$

è definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, \ldots, z_n]$ di $(\mathbb{P}^n_K)^*$)

$$P = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n] \quad \longleftrightarrow \quad P^*: \; \alpha_0z_0 + \cdots + \alpha_nz_n = 0$$

Anche in questo caso, vale la proprietà analoga a quella vista prima: se P è un punto e H un iperpiano di $\mathbb{P}^n_K$ allora

$$P \in H \iff H^* \in P^*.$$

Pertanto l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}^n_K$ passanti per un fissato punto P è parametrizzato dai punti dell'iperpiano P^* di $(\mathbb{P}^n_K)^*$. Come nel caso precedente, il passaggio per un punto è un esempio di *condizione lineare*.

Definizione 4.10.3. Si dice *sistema lineare di iperpiani di dimensione* r una famiglia di iperpiani di $\mathbb{P}^n_K$ i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n_K)^*$ di dimensione r.

Esempio 4.10.3. Consideriamo il sistema lineare dei piani di $\mathbb{P}^3$:

$$\mathcal{S}: \ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

e imponiamo la condizione lineare di passaggio per il punto $P = [-1, 2, 3, 4]$. Quest'ultima è

$$-a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0.$$

Pertanto $a_0 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3$ e il sistema lineare dei piani passanti per P risulta dunque

$$\mathcal{S}_P: \ (2a_1 + 3a_2 + 4a_3)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ed è ovviamente di dimensione 2: infatti è parametrizzato dal piano di $(\mathbb{P}^3)^*$ di equazione $-z_0 + 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 0$.
Richiedendo anche il passaggio per $Q = [0, 2, 1, 1]$, si ha l'ulteriore condizione lineare

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

quindi, complessivamente, si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 2:

$$\begin{cases} -a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 &= 0 \\ \qquad\quad 2a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 &= -6a_1 - a_2 \\ a_3 &= -2a_1 - a_2 \end{cases}.$$

Il sistema lineare dei piani passanti per P e Q risulta dunque

$$\mathcal{S}_{P,Q}: \ (-6a_1 - a_2)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + (-2a_1 - a_2)x_3 = 0$$

e chiaramente ha dimensione 1: è un fascio di piani.
Infine, imponendo il passaggio per un terzo punto $R = [1, 0, 0, 0]$ si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 3 e, di conseguenza, un sistema lineare di piani di dimensione 0, cioè un unico piano.
Determinarlo per esercizio.

Definizione 4.10.4. Diciamo che ρ condizioni lineari omogenee sui coefficienti degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$, con $1 \leq \rho \leq n$, sono *indipendenti* se il rango del sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni è uguale a ρ.

Osservazione 4.10.2. Il sistema lineare degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ che soddisfano ρ condizioni lineari indipendenti ha dimensione $n - \rho$. Infatti è parametrizzato dal sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ che è intersezione dei ρ iperpiani indipendenti corrispondenti ciascuno a una delle condizioni lineari.

Abbiamo visto prima che un esempio di condizione lineare è il passaggio per un punto fissato. Dall'Osservazione precedente segue dunque immediatamente il seguente risultato.

Proposizione 4.10.2. *Sia $1 \leq \rho \leq n$ e siano $P_1, \ldots, P_\rho$ punti proiettivamente indipendenti di $\mathbb{P}^n$. Allora il passaggio per tali punti impone agli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ esattamente ρ condizioni lineari indipendenti. Dunque il sistema lineare degli iperpiani passanti per $P_1, \ldots, P_\rho$ ha dimensione $n - \rho$.*

Dimostrazione. Si considerino le coordinate omogenee dei punti

$$P_i = [\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}], \quad i = 1, \ldots, \rho.$$

Per ipotesi, tali punti sono indipendenti e quindi (vedi il Corollario 3.2.1 e la Definizione 3.2.2) la matrice $A \in K^{\rho, n+1}$, avente per righe le loro coordinate, ha rango ρ. D'altra parte, il passaggio per $P_1, \ldots, P_\rho$ impone ai coefficienti z_i del generico iperpiano $z_0 x_0 + \cdots + z_n x_n = 0$ di $\mathbb{P}^n$ di soddisfare il sistema lineare omogeneo

$$AZ = 0, \quad \text{dove} \quad Z := {}^t(z_0, \ldots, z_n).$$

Pertanto $AZ = 0$ è costituito da ρ equazioni indipendenti e il suo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^{n+1} di dimensione $n + 1 - \rho$. Il suo proiettivizzato è quindi un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ di dimensione $n - \rho$, come volevamo. $\square$

4.11 Fasci di coniche

Introduciamo ora una costruzione come quella precedente, ma nell'ambito delle coniche del piano proiettivo.
A una conica di $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2_K$ (con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) di equazione

$$C: \; a_{00}x_0^2 + 2\,a_{01}\,x_0x_1 + 2\,a_{02}\,x_0x_2 + a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 = 0 \quad (4.28)$$

si può associare l'insieme dei suoi possibili coefficienti

$$\{k\,(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) \mid k \in K^*\}$$

che è un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5$. In tal modo, si individua una corrispondenza biunivoca:

$$\psi: \quad \{\text{coniche di } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^5$$

definita da

$$C \qquad \mapsto \qquad [a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

Tale applicazione è ben definita. Nel seguito denoteremo quindi, i coefficienti $[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}]$ della generica conica anche con le coordinate omogenee $[z_0, \ldots, z_5]$ di $\mathbb{P}^5$.

Esempio 4.11.1. Il punto di $\mathbb{P}^5$ associato alla conica $y = 3x^2$, secondo la corrispondenza ψ sopra definita, è $[0, 0, -1/2, 3, 0, 0]$.

Diciamo dunque che le coniche del piano sono *parametrizzate* da $\mathbb{P}^5$.

Definizione 4.11.1. Si dice *sistema lineare di coniche di dimensione* r una famiglia di coniche di $\mathbb{P}^2$ i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^5$ di dimensione r, con $0 \leq r \leq 5$.

In particolare, le coniche del piano costituiscono un sistema lineare di dimensione 5, che è l'intero $\mathbb{P}^5$. E una sola conica è un sistema lineare di dimensione 0.

In analogia con quanto visto nel paragrafo precedente, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 4.11.2. Si dice *condizione lineare* sulle coniche di $\mathbb{P}^2$ un'equazione lineare omogenea nei coefficienti della generica conica.
In altri termini, è l'equazione di un iperpiano di $\mathbb{P}^5$, dove quest'ultimo parametrizza (tramite ψ) le coniche di $\mathbb{P}^2$, dunque è della forma

$$m_0z_0 + \cdots + m_5z_5 = 0,$$

dove $m_i \in K$ per ogni i.

Esempio 4.11.2. Sono condizioni lineari sulle coniche di $\mathbb{P}^2$ le equazioni $a_{11} + a_{22} = 0$ (o, equivalentemente, $z_3 + z_5 = 0$), $2a_{12} - 3a_{02} = 0$ (o, equivalentemente, $2z_4 - 3z_2 = 0$), ecc.

Definizione 4.11.3. Diciamo che s condizioni lineari sulle coniche sono *indipendenti* se il sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni ha rango s, i.e. è del tipo

$$MZ = 0, \quad \text{dove} \quad M \in K^{s,6}, \quad \mathrm{rk}(M) = s$$

avendo posto

$$Z = {}^t[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = {}^t[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

In altri termini, se il sistema lineare omogeneo $MZ = 0$ è l'equazione cartesiana di un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^5$ avente codimensione s.

Da questa definizione segue ovviamente che il numero s di condizioni indipendenti deve verificare $1 \leq s \leq 5$.

Si ha immediatamente il seguente fatto.

Proposizione 4.11.1. *Le coniche di $\mathbb{P}^2$ che soddisfano s condizioni lineari indipendenti costituiscono un sistema lineare di coniche di dimensione* $5 - s$.

L'esempio più semplice di condizione lineare è il passaggio per un punto.

Esempio 4.11.3. Determinare la condizione lineare che esprime il passaggio per $P = [1, 0, 0]$ e l'equazione del sistema lineare $\mathcal{S}_P$ (di dimensione 4) di tutte le coniche per P.

Imponiamo il passaggio per P alla generica conica di equazione (4.28), ottenendo $a_{00} = 0$. Pertanto

$$\mathcal{S}_P : \ 2\, a_{01}\, x_0 x_1 + 2\, a_{02}\, x_0 x_2 + a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + a_{22}\, x_2^2 = 0.$$

Si noti che ha dimensione 4 in quanto parametrizzato dall'iperpiano di $\mathbb{P}^5$ di equazione $z_0 = 0$. Infatti, nell'equazione di $\mathcal{S}_P$ compaiono 5 parametri omogenei indipendenti.

Vogliamo trovare un risultato analogo a quello della Proposizione 4.10.2, cioè determinare il numero e la posizione reciproca di punti che impongano condizioni indipendenti al sistema lineare delle coniche.

Ricordiamo che, in $\mathbb{P}^2$ il numero massimo di punti proiettivamente indipendenti è 3 (vedi Definizione 3.2.2), quindi dovremo utilizzare la nozione più ampia di punti in posizione generale.

Lemma 4.11.2. *Si consideri un sistema di s condizioni lineari indipendenti sui coefficienti (con $1 \leq s \leq 4$)*

$$MZ = 0, \quad M = (m_{ij}) \in K^{s,6} \tag{4.29}$$

e si consideri una ulteriore condizione lineare

$$h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 = 0. \tag{4.30}$$

Allora le $s+1$ condizioni

$$\Sigma : \begin{cases} MZ & = & 0 \\ h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 & = & 0 \end{cases}$$

sono indipendenti se e solo se esiste almeno una conica che soddisfa (4.29) ma non soddisfa (4.30).

Dimostrazione. Per ipotesi $\mathrm{rk}(M) = s$ o, equivalentemente, per la Proposizione 4.11.1, $\dim \mathcal{S}_M = 5 - s$, dove $\mathcal{S}_M$ è il sistema lineare delle coniche che soddisfano la (4.29) .

Inoltre, per lo stesso motivo, le $s+1$ condizioni in Σ sono indipendenti se e solo se

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} & & M & & & \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \end{pmatrix} = s + 1$$

e questo equivale a $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s+1)$. Poiché si hanno ovviamente le inclusioni di sottospazi proiettivi

$$\mathcal{S}_\Sigma \subseteq \mathcal{S}_M \subset \mathbb{P}^5$$

è chiaro che $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s+1)$ se e solo se la precedente inclusione è stretta se e solo se se esiste almeno una conica che soddisfa (4.29) ma non soddisfa (4.30). □

Teorema 4.11.3. *Si consideri il sistema lineare di equazione (4.28) costituito da tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$ e si imponga ad esso il passaggio per i punti $P_1, \ldots, P_s$, dove $1 \leq s \leq 5$. Se tali punti sono in posizione generale, allora le s condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti.*

Dimostrazione. Proviamo l'affermazione nei vari casi.
(a) Se $s = 1$, l'affermazione è ovvia.
(b) Se $s = 2$ e P_1, P_2 sono distinti, allora le 2 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il Lemma 4.11.2, basta trovare una conica che contiene P_1 ma non P_2. Poiché i punti sono distinti, esiste una retta r per P_1 e non per P_2; basta considerare la conica doppiamente degenere r^2.
(c) Se $s = 3$ e P_1, P_2, P_3 non sono allineati (e in particolare sono distinti), allora le 3 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il

punto (b) le 2 condizioni di passaggio per P_1 e P_2 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 4.11.2, basta trovare una conica che contiene P_1 e P_2 ma non P_3. Poiché i 3 punti non sono allineati, se r è la retta per P_1 e P_2, allora $P_3 \notin r$. Dunque r^2 è una conica che prova la tesi.
(d) Se $s = 4$ e P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale (e in particolare sono distinti), allora le 4 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il punto (c) le 3 condizioni di passaggio per P_1, P_2, P_3 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 4.11.2, basta trovare una conica che contiene P_1, P_2, P_3 ma non P_4. Sia r è la retta per P_1 e P_2 e s è la retta per P_2 e P_3, dall'ipotesi si ha che $P_4 \notin (r \cup s)$ e quindi $r \cup s$ è una conica che prova la tesi.
(e) Analogo: concludere per esercizio. □

Tale risultato, con la Proposizione 4.11.1, ha due immediate conseguenze.

Corollario 4.11.4. *Per 5 punti in posizione generale passa una ed una sola conica.*

Esercizio C3. Si provi che per 5 punti, dei quali al massimo 3 sono allineati, passa una ed una sola conica.

Corollario 4.11.5. *Le coniche del piano passanti per 4 punti in posizione generale costituiscono un sistema lineare di dimensione 1.*

Tali sistemi lineari saranno l'oggetto di studio di quest'ultima parte del corso: vedremo come descriverli e come classificarli.

Definizione 4.11.4. Un sistema lineare di coniche di dimensione 1 si dice *fascio di coniche.*

Un fascio è parametrizzato da una retta di $\mathbb{P}^5$ del tipo

$$[z_0, \dots, z_5] = \lambda[\alpha_0, \dots, \alpha_5] + \mu[\beta_0, \dots, \beta_5].$$

Mediante la corrispondenza biunivoca ψ, al punto $[z_0, \dots, z_5]$ corrisponde la conica $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$, mentre ai punti $[\alpha_0, \dots, \alpha_5]$ e $[\beta_0, \dots, \beta_5]$ corrispondono, rispettivamente, due specifiche coniche C e D di equazioni

$$C:\ f(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad \text{e} \quad D:\ g(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Pertanto ogni conica del fascio è descritta da un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2).$$

Definizione 4.11.5. L'equazione

$$\mathcal{F}: \ \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{4.31}$$

con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, si dice *equazione cartesiana del fascio* $\mathcal{F}$. Inoltre le coniche $C: \ f(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $D: \ g(x_0, x_1, x_2) = 0$ si dicono *generatori* di $\mathcal{F}$.

Anche in questo contesto (come accadeva per i fasci di rette nel piano o i fasci di piani nello spazio), i generatori di un fascio di coniche non sono univocamente individuati. Anzi, una qualunque coppia di coniche distinte del fascio può generare il fascio stesso. Inoltre, dall'equazione (4.31) è chiaro che un punto è comune a tutte le coniche di un fascio se e solo se appartiene a entrambi i generatori.

Definizione 4.11.6. Un punto P del piano si dice *punto base* di un fascio $\mathcal{F}$ se appartiene a tutte le coniche di $\mathcal{F}$.

Esempio 4.11.4. Calcoliamo i punti base del fascio

$$\mathcal{F}: \ \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Come osservato, sono i punti comuni ai due generatori e quindi corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & = & 0 \\ xy & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0, \pm 1), (\pm 1, 0).$$

Nel prossimo paragrafo classificheremo i vari tipi di fasci a seconda dei loro punti base. Iniziamo qui con una prima suddivisione relativa alle coniche degeneri e non degeneri.

Proposizione 4.11.6. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora si presenta uno e uno solo dei due casi:*

i) $\mathcal{F}$ contiene esattamente 3 coniche degeneri, eventualmente coincidenti;

ii) $\mathcal{F}$ è costituito solo da coniche degeneri.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $C_{\lambda,\mu}$ la generica conica di $\mathcal{F}$ della forma

$$C_{\lambda,\mu}: \ \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0$$

dove

$$f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad g(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$$

sono due polinomi omogenei di secondo grado che definiscono i due generatori di $\mathcal{F}$, rispettivamente. La matrice associata alla conica $C_{\lambda,\mu}$ è

$$B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \\ \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{02} + \mu b_{02} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 4.9.4, la conica $C_{\lambda,\mu}$ è degenere se e solo se $\det(B_{\lambda,\mu}) = 0$. Chiaramente, $\det(B_{\lambda,\mu})$ è un polinomio omogeneo in λ e μ. Se è non nullo, tale polinomio ha grado 3 e quindi ha 3 radici (e tutte quelle proporzionali), non necessariamente distinte, che denotiamo con

$$[\lambda_1, \mu_1], \quad [\lambda_2, \mu_2], \quad [\lambda_3, \mu_3].$$

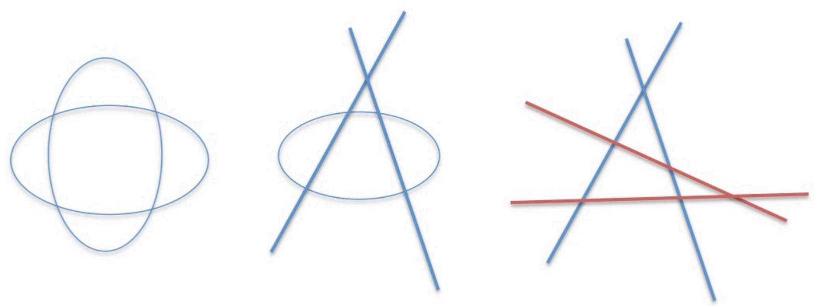
Dunque C_{λ_i,μ_i}, per $i = 1, 2, 3$, sono tutte e sole le coniche degeneri di $\mathcal{F}$. Se invece $\det(B_{\lambda,\mu})$ è il polinomio nullo allora ogni conica $C_{\lambda,\mu}$ è degenere. $\square$

Definizione 4.11.7. Un fascio di coniche si dice *degenere* se tutte le sue coniche sono degeneri. Si dice *non degenere* altrimenti.

Nella ricerca dei punti base di un fascio si può procedere determinando i punti comuni a due generatori del fascio stesso. È naturale dunque chiedersi in quanti punti si incontrano due coniche.

Teorema 4.11.7. *Due coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ senza componenti comuni si intersecano esattamente in 4 punti, eventualmente coincidenti.*

Dimostrazione. Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}^2$. Ci sono 3 possibilità:
I) entrambe sono degeneri; in tal caso, poiché non hanno componenti in comune, la tesi segue banalmente.
II) Una è degenere e l'altra no. In tal caso, sia C non degenere e $D = r \cup s$ (con r e s coincidenti o meno). Allora $C \cap D = C \cap (r \cup s) = (C \cap r) \cup (C \cap s)$ e si conclude con la Proposizione 4.9.10.
III) Entrambe sono non degeneri. I punti di intersezione di C e D sono i punti base del fascio (non degenere) $\mathcal{F}$ generato da C e D. Ma, per la Proposizione 4.11.6, $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere D'; ovviamente $C \cap D = C \cap D'$ e si conclude con quanto visto nella parte (II). $\square$



Definizione 4.11.8. Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ senza componenti comuni. Definiamo la *molteplicità di intersezione* di C e D in un punto comune P, e la denotiamo con $m_P(C, D)$, come segue:

i) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ allora $m_{P_i}(C, D) = 1$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$;

ii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 2$ (e $m_{P_2}(C, D) = 1 = m_{P_3}(C, D)$). Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2, P_3\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *tangenti* in P_1.

iii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_i}(C) = T_{P_i}(D)$, per $i = 1, 2$, allora $m_{P_i}(C, D) = 2$, per $i = 1, 2$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2^2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono tangenti sia in P_1 che in P_2.

iv) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$, ma $T_{P_2}(C) \neq T_{P_2}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 3$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^3, P_2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *osculanti* in P_1.

v) Se $C \cap D = \{P_1\}$ allora $m_{P_1}(C, D) = 4$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^4\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *iperosculanti* in P_1.

Corollario 4.11.8. *Un fascio non degenere di coniche ha esattamente* 4 *punti base in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, *eventualmente coincidenti.*

Dimostrazione. Per definizione, in un un fascio non degenere $\mathcal{F}$ c'è (almeno) una conica non degenere C. Se D è un'ulteriore conica di $\mathcal{F}$, possiamo considerarle come generatori del fascio. Pertanto i punti base di $\mathcal{F}$, come osservato in precedenza, sono esattamente i punti di $C \cap D$. Essendo C non degenere, non ha componenti in comune con D e quindi, per il Teorema 4.11.7, $C \cap D$ è costituita da 4 punti, eventualmente coincidenti. □

Tale risultato e il Corollario 4.11.5 suggeriscono che la "configurazione" dei punti base di un fascio di coniche ne determina la struttura.

Quanto visto finora per i fasci di coniche proiettive, può essere espresso in modo analogo nel piano affine o euclideo, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.11.5. Determinare il fascio $\mathcal{F}$ generato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e dall'unione degli assi cartesiani di $\mathbb{E}^2$.
Il fascio richiesto ha equazione, in $\mathbb{E}^2$,

$$\mathcal{F}: \ \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Lo stesso fascio è descritto in $\mathbb{P}^2$ dall'equazione

$$\mathcal{F}: \ \lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

4.12 Classificazione dei fasci di coniche

Abbiamo visto nel Paragrafo 11 che l'esempio più semplice di condizione lineare sulle coniche è il passaggio per un punto. Ma non è l'unico. Infatti, anche se la tangenza a una retta data impone una condizione *quadratica* sui coefficienti della generica conica, la tangenza a una retta in un suo punto equivale a due condizioni lineari, come mostra il seguente risultato.

Lemma 4.12.1. *In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la tangenza a una retta t in un suo punto P impone al sistema lineare delle coniche due condizioni lineari indipendenti.*

Dimostrazione. Si verifica (per esercizio) che non è restrittivo supporre che $t: \ x_2 = 0$ e $P = [1, 0, 0]$. Come al solito, consideriamo l'equazione (4.28)

$$C: \ a_{00}x_0^2 + 2\,a_{01}\,x_0x_1 + 2\,a_{02}\,x_0x_2 + a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1x_2 + a_{22}\,x_2^2 = 0.$$

Imponiamo il passaggio per P, ottenendo $a_{00} = 0$. Intersecando C e t si ha

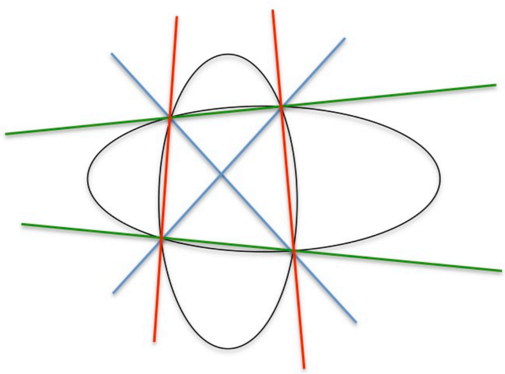
$$\begin{cases} 2\,a_{01}\,x_0x_1 + a_{11}\,x_1^2 & = & 0 \\ \qquad x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(2\,a_{01}\,x_0 + a_{11}\,x_1) & = & 0 \\ \qquad x_2 & = & 0 \end{cases}$$

e quest'ultimo sistema ha per soluzione P^2 se e solo se $a_{01} = 0$. Si osservi, infine, che le condizioni $a_{00} = 0$ e $a_{01} = 0$ sono ovviamente indipendenti. □

Nel seguito, siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e r_{ij} la retta per P_i e P_j, per $i, j = 1, 2, 3, 4$. Si prova (usando il Teorema fondamentale delle proiettività) che non è restrittivo fissare i punti e le rette in gioco e operare nel piano euclideo.

Proposizione 4.12.2. *Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti distinti e in posizione generale e sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche avente tali punti come punti base. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere e le sue 3 coniche degeneri sono $C_1 := r_{12} \cup r_{34}$, $C_2 := r_{23} \cup r_{14}$, $C_3 := r_{24} \cup r_{13}$.*

Dimostrazione. La famiglia $\mathcal{F}$ è un fascio per il Corollario 4.11.5. Inoltre $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{F}$ e sono le uniche degeneri contenenti i 4 punti. □



Proposizione 4.12.3. *Siano P_1, P_2, P_3 punti distinti e in posizione generale (cioè non allineati) e sia t una retta contenente P_3 ma non P_1 e P_2. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche passanti per i 3 punti e tangenti a t in P_3. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono $r_{13} \cup r_{23}$ (contata due volte) e $t \cup r_{12}$ e i suoi punti base sono P_1, P_2, P_3^2.*

Dimostrazione. Possiamo scegliere $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (0,0)$ e $t: \ x + y = 0$. La generica conica tangente a t in P_3 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta(x+y) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P_1 e P_2 si ottengono, rispettivamente, le condizioni $\delta = \alpha$ e $\gamma = \alpha$. La famiglia richiesta è dunque

$$\mathcal{F}: \ \alpha(x^2 + y^2 - x - y) + \beta xy = 0$$

che risulta un fascio di coniche. La generica conica di $\mathcal{F}$ è

$$C_{\alpha,\beta}: \ 2\alpha(x^2 + y^2 - x - y) + 2\beta xy = 0$$

e la sua matrice associata è

$$B_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & \beta \\ -\alpha & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

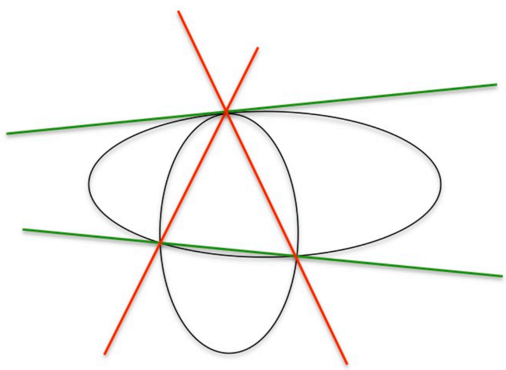
Essendo $\det(B_{\alpha,\beta}) = -2\alpha^2(2\alpha - \beta)$, si deduce che $\mathcal{F}$ contiene esattamente 3 coniche degeneri (dunque è un fascio non degenere) ottenute per $\alpha^2 = 0$ e per $\beta = 2\alpha$. Esse sono $xy = 0$ (contata 2 volte), cioè $r_{13} \cup r_{23}$, e la conica

$$x^2 + y^2 - x - y + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x+y-1) = 0$$

che risulta essere $t \cup r_{12}$. Infine, i punti base di $\mathcal{F}$ si ottengono intersecando, ad esempio, le due coniche degeneri:

$$\begin{cases} xy & = 0 \\ (x+y)(x+y-1) & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 = y(y-1) \\ y = 0 = x(x-1) \end{array}$$

ottenendo $(0,0)^2, (0,1), (1,0)$. $\square$



Proposizione 4.12.4. *Siano P_1 e P_2 due punti distinti e s e t due rette distinte tali che $P_1 \in s$, $P_1 \notin t$, $P_2 \in t$, $P_2 \notin s$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche tangenti a s in P_1 e a t in P_2. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono r_{12}^2 (contata due volte) e $s \cup t$ e i suoi punti base sono P_1^2, P_2^2.*

Dimostrazione. Come prima, si possono scegliere (nel piano euclideo) i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e le rette $s:\ x = 0$, $t:\ x - 1 = 0$.
La generica conica tangente a s in P_1 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x = 0.$$

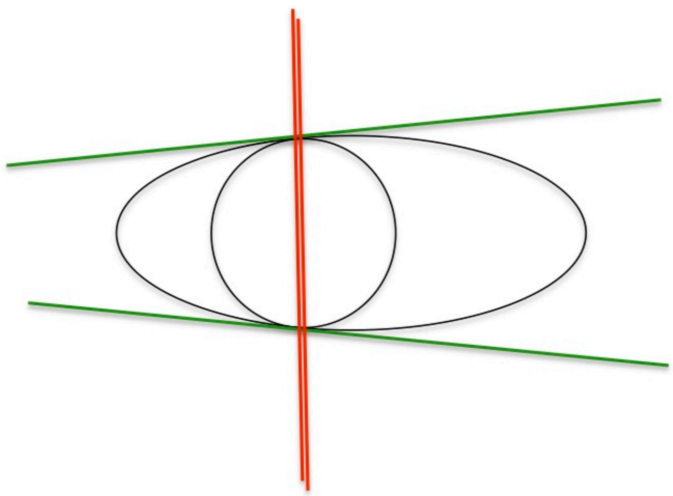
Imponendo la tangenza a t in P_2 si ottengono le ulteriori condizioni $\delta = \alpha$ e $\beta = 0$. La famiglia richiesta è dunque

$$\mathcal{F}:\ \alpha(x^2 - x) + \gamma y^2 = 0.$$

che è chiaramente un fascio di coniche. I generatori sono coniche degeneri e precisamente $x(x-1) = 0$ è l'equazione di $s \cup t$, mentre $y^2 = 0$ è la conica doppiamente degenere r_{12}^2. Per verificare che quest'ultima è contata due volte, basta calcolare il determinante della matrice della generica conica $C_{\alpha,\gamma}$ del fascio $\mathcal{F}$, come nella Proposizione precedente.
Analogamente, per il calcolo dei punti base si possono intersecare le due coniche degeneri ottenendo

$$\begin{cases} x(x-1) &= 0 \\ y^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (0,0)^2,\ (1,0)^2$$

come volevamo. □



Proposizione 4.12.5. *Siano C una conica non degenere, P_1 e P_2 due punti distinti di C e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1, passanti per P_2 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 3$. Allora:*

i) $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere;

ii) l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è $r_{12} \cup t$ (contata 3 volte);

iii) i punti base di $\mathcal{F}$ sono P_1^3 e P_2;

iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha $m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 3$.

Dimostrazione.
i)$-$*ii)* Si possono scegliere, come al solito, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $t : \ x = 0$. Si osservi anzitutto che le 3 condizioni (tangenza a t in P_1 e passaggio per P_2) determinano un sistema lineare di coniche di dimensione 2. Si vede facilmente che il suo elemento generale è del tipo

$$\Gamma : \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x = 0.$$

Una di esse è la conica C, la cui equazione si ottiene scegliendo opportuni valori dei parametri:

$$C : \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax = 0.$$

Si verifica facilmente che C è non degenere se e solo se $ac \neq 0$.
Ora imponiamo che Γ sia osculante C in P_1: posti $C \cap \Gamma = \{P_1^2, P_2, Q\}$, imponiamo cioè che Q coincida con P_1. Ponendo a sistema le equazioni di C e Γ, questo è equivalente al sistema tra l'equazione di C e

$$\gamma(ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax) - c(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x) = 0$$

da cui

$$x[(\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c)] = 0.$$

Si ottengono dunque due sistemi: dal primo si ha $C \cap \{x = 0\}$ e quindi P_1^2. Il secondo fornisce le due intersezioni fra C e la retta

$$r : \ (\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c) = 0$$

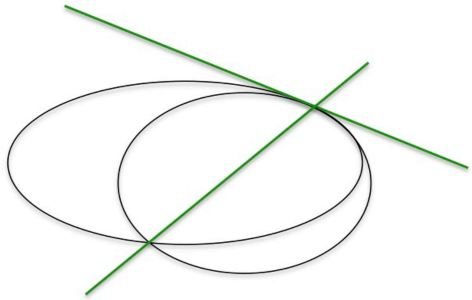
cioè il punto $P_2 = (1, 0)$ e l'ulteriore punto Q. È evidente che $Q = P_1$ se e solo se $P_1 \in r$ se e solo se $\gamma a - \alpha c = 0$. Imponendo tale condizione a Γ si ottiene dunque un'equazione per la famiglia $\mathcal{F}$ che risulta essere

$$\mathcal{F} : \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha(c/a)y^2 - \alpha x = 0$$

o anche, denotando con h il coefficiente numerico c/a,

$$\mathcal{F} : \quad \alpha(x^2 + hy^2 - x) + 2\beta xy = 0.$$

Quindi $\mathcal{F}$ è un fascio. Considerando la matrice della generica conica di $\mathcal{F}$, il suo determinante risulta $-h\alpha^3/2$, che risulta nullo se e solo se $\alpha = 0$. Infatti $h = c/a \neq 0$ in quanto C è non degenere per ipotesi. Pertanto l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è $xy = 0$ contata 3 volte.
Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio. $\square$



Proposizione 4.12.6. *Siano C una conica non degenere, $P_1 \in C$ e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 4$. Allora:*

i) $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere;

ii) l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è t^2 (contata 3 volte);

iii) $\mathcal{F}$ ha P_1^4 come unico punto base;

iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha

$$m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 4.$$

Dimostrazione.
i) − *ii)* Per il Teorema 4.9.9 (*Classificazione delle coniche proiettive complesse*), la conica C è proiettivamente equivalente a $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$, che può essere ricondotta, nel piano affine, alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Con una opportuna rototraslazione possiamo dunque supporre che

$$C: \ x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad P_1 = (0, 0).$$

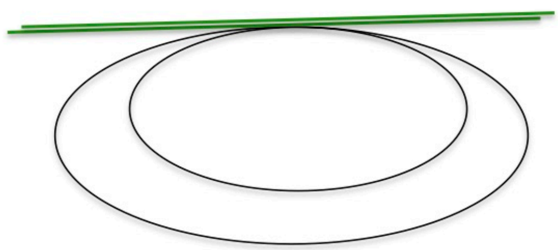
Dunque $t: \ x = 0$. Imponendo le due condizioni lineari di tangenza a t in P_1 alle coniche del piano si ottiene la famiglia

$$\Gamma: \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x = 0.$$

Consideriamo $\Gamma \cap C$:

$$\begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x & = & 0 \\ y^2 & = & -x^2 + 2x \end{cases}$$

da cui
$$\begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ (\alpha-\gamma)x^2+2\beta xy+(\delta+2\gamma)x & = & 0 \end{cases}.$$
Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:
$$(I): \quad \begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ x & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)^2$$
$$(II): \quad \begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ (\alpha-\gamma)x+2\beta y+\delta+2\gamma & = & 0 \end{cases}$$
Affinché $(x,y)=(0,0)$ sia soluzione, deve essere $\delta+2\gamma=0$. Supponiamo $\beta\neq 0$; allora il sistema è equivalente a
$$\begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ y & = & (\gamma-\alpha)x/2\beta \end{cases}$$
da cui
$$(\gamma-\alpha)^2x^2=-4\beta^2x^2+8\beta^2x.$$
Tale equazione ha $x=0$ come radice doppia se $\beta=0$. Dunque, sostituendo nel sistema (II), si ha
$$(II): \quad \begin{cases} y^2 & = & -x^2+2x \\ (\alpha-\gamma)x & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)^2.$$
Sostituendo le condizioni trovate ($\delta+2\gamma=0$ e $\beta=0$) nell'equazione di Γ, si determina infine la famiglia richiesta
$$\mathcal{F}: \quad \alpha x^2+\gamma y^2-2\gamma x=0$$
che risulta chiaramente un fascio. Considerando la matrice della generica conica di $\mathcal{F}$, il suo determinante risulta γ^3, che è nullo se e solo se $\gamma=0$. Pertanto l'unica conica degenere di $\mathcal{F}$ è $x^2=0$ (contata 3 volte).
Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio. □



Teorema 4.12.7 (Classificazione dei fasci non degeneri di coniche)**.**
Sia $\mathcal{F}$ un fascio non degenere di coniche di punti base P_1, P_2, P_3, P_4.
Allora $\mathcal{F}$ è di uno dei seguenti tipi:

i) fascio generale di coniche *se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti e in posizione generale;*

ii) fascio tangente di coniche *se $P_1 = P_2, P_3, P_4$ sono distinti e non allineati; in tal caso le coniche di $\mathcal{F}$ hanno la stessa tangente in P_1;*

iii) fascio bitangente di coniche *se $P_1 = P_2$ e $P_3 = P_4$ sono distinti; in tal caso le coniche di $\mathcal{F}$ hanno le stesse rette tangenti in P_1 e in P_3;*

iv) fascio osculante di coniche *se $P_1 = P_2 = P_3$ e P_4 sono distinti; in tal caso due coniche di $\mathcal{F}$ hanno molteplicità di intersezione 3 in P_1;*

v) fascio iperosculante di coniche *se $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$; in tal caso due coniche di $\mathcal{F}$ hanno molteplicità di intersezione 4 in P_1.*

Dimostrazione. Dalle Proposizioni 4.12.2, 4.12.3, 4.12.4, 4.12.5, 4.12.6 segue la descrizione dei tipi di fasci $(i), \dots, (v)$. Resta da provare che ogni fascio non degenere $\mathcal{F}$ è di uno di questi tipi. Per la Proposizione 4.11.6, $\mathcal{F}$ contiene necessariamente una conica non degenere e una degenere, che indichiamo, rispettivamente, con C e D. Esaminiamo tutte le possibilità.

1. $D = r \cup s$, con $r \neq s$. Posto $Q := r \cap s$,

   1.1. $Q \notin C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:
   - r e s sono secanti C;
   - r è secante e s è tangente a C.
   - r e s sono tangenti a C;

   Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 1, 2, 3 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio generale, tangente o bitangente.

   1.2. $Q \in C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:
   - r e s sono secanti C;
   - r è secante e s è tangente a C.

   Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 4 e 5 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio tangente o osculante.

2. $D = r^2$. La posizione reciproca di C e di r può essere:
   - r è secante C;
   - r è tangente a C.

   Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 6 e 7 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio bitangente o iperosculante. □

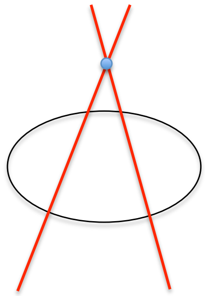


Figura 1

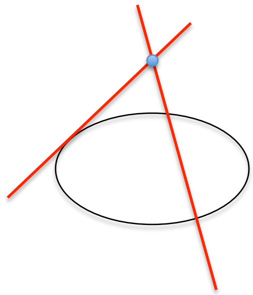


Figura 2

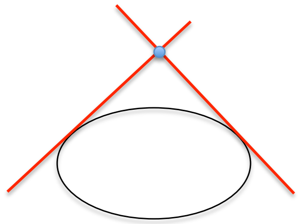


Figura 3

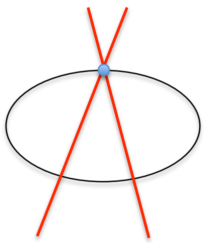


Figura 4

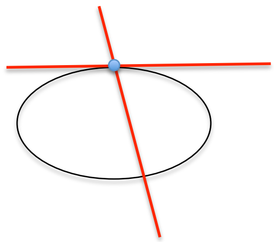


Figura 5

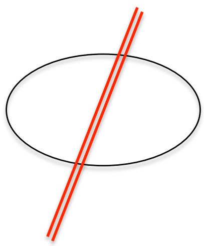


Figura 6

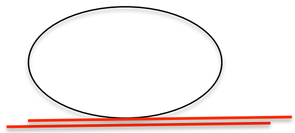


Figura 7

Esempio 4.12.1. Determinare l'equazione della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche di $\mathbb{A}^2$ per P_1, P_2, P_3, P_4, specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (2, 2).$$

Per vedere se i 4 punti sono in posizione generale, occorre considerare le loro coordinate omogenee attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ e quindi

$$P_1 = [1, 1, 0], \quad P_2 = [1, 0, 0], \quad P_3 = [1, 0, 1], \quad P_4 = [1, 2, 2].$$

Tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo accade, come si verifica facilmente. Dunque $\mathcal{F}$ è un fascio generale di coniche. In particolare, è un fascio non degenere e contiene esattamente 3 coniche degeneri distinte. Possiamo sceglierne 2 come generatori; ad esempio

$$C := r_{12} \cup r_{34}, \quad D := r_{13} \cup r_{24}.$$

Si calcolano immediatamente:

$$C : \ y(x - 2y + 2) = 0, \quad D : \ (x + y - 1)(x - y) = 0$$

dunque

$$\mathcal{F} : \quad \lambda y(x - 2y + 2) + \mu(x + y - 1)(x - y) = 0.$$

Esempio 4.12.2. Determinare l'equazione in $\mathbb{A}^2$ della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche osculanti C in P_1 e passanti per P_2, specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (-1, 0)$ e

$$C : \ 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

Poiché $P_2 \in C$ (e C è osculante se stessa in ogni punto), allora $C \in \mathcal{F}$. Questo risulta quindi un fascio osculante di coniche generato, ad esempio, da C e dalla conica degenere $D := r_{12} \cup t$, dove $t = T_{P_1}(C)$.

Posto $f(x, y)$ il polinomio che definisce C, si calcola

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_1} = 8x + 8\Big|_{P_1} = 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_1} = 2y - 4\Big|_{P_1} = 0,$$

quindi $t : \ x = 0$.
D'altra parte $r_{12} : \ 2x - y + 2 = 0$ e dunque $D : \ x(2x - y + 2) = 0$, da cui

$$\mathcal{F} : \quad \lambda(4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4) + \mu x(2x - y + 2) = 0.$$

Per descrivere i fasci degeneri di coniche, iniziamo con due semplici fatti.

Osservazione 4.12.1. Se un fascio $\mathcal{F}$ ha, tra i suoi punti base, 3 punti distinti allineati, allora è un fascio degenere. Infatti, supponiamo che $C \in \mathcal{F}$ sia una conica non degenere e sia r la retta contenente 3 punti base distinti P_1, P_2, P_3. Allora $(C \cap r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3\}$, ma questo è impossibile per la Proposizione 4.9.10. Dunque non esiste una conica non degenere in $\mathcal{F}$.

Osservazione 4.12.2. Non è sufficiente che i generatori di $\mathcal{F}$ siano due coniche degeneri affinchè $\mathcal{F}$ sia un fascio degenere. Ad esempio, un fascio generale di coniche ha 3 coniche degeneri distinte, dunque si possono scegliere 2 di queste per generarlo. Tuttavia è una condizione necessaria. Vedremo che due coniche degeneri generano un fascio degenere o non degenere a seconda della posizione dei loro punti doppi.

Nel successivo Teorema, denotiamo con $\mathcal{G}_P$ il fascio di rette di sostegno P.

Teorema 4.12.8. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio degenere di coniche generato da due coniche semplicemente degeneri*

$$C_1 := r_1 \cup s_1, \quad C_2 := r_2 \cup s_2$$

e siano

$$P_1 := r_1 \cap s_1, \quad P_2 := r_2 \cap s_2$$

i rispettivi punti doppi. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:

i) C_1 e C_2 hanno una componente in comune, per esempio $r_1 = r_2$. In tal caso, $\Gamma \in \mathcal{F}$ se e solo se $\Gamma = r_1 \cup t$ dove $t \in \mathcal{G}_Q$ e $Q := s_1 \cap s_2$. Inoltre i punti base di $\mathcal{F}$ sono tutti e soli i punti di r_1 e il punto Q.

ii) C_1 e C_2 non hanno componenti in comune e $P_1 = P_2$. In tal caso, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_{P_1}$. Inoltre $\mathcal{F}$ ha come unico punto base P_1, contato 4 volte.

Dimostrazione. Si presentano i seguenti casi:

(a) $P_1 \notin C_2$ e $P_2 \notin C_1$. In questo caso C_1 e C_2 si intersecano in 4 punti in posizione generale, pertanto $\mathcal{F}$ è un fascio generale di coniche; in particolare è non degenere, contro l'ipotesi.

(b) $P_1 \notin C_2$ e $P_2 \in C_1$. In questo caso P_2 appartiene a una sola delle componenti di C_1, ad esempio $P_2 \in r_1$. In questo caso C_1 e C_2 si intersecano in 3 punti non allineati dei quali P_2 è contato due volte, pertanto $\mathcal{F}$ è un fascio tangente di coniche, tutte aventi comune tangente r_1 nel punto P_2 (vedi Proposizione 4.12.3). In particolare $\mathcal{F}$ è non degenere, contro l'ipotesi.

(c) $P_1 \in C_2$ e $P_2 \in C_1$, ma $P_1 \neq P_2$. In questo caso la retta per P_1 e P_2 è una componente comune di C_1 e C_2 (retta base). Pertanto $C_1 = r \cup s_1$ e $C_2 = r \cup s_2$. In un opportuno sistema di riferimento si ha dunque

$$C_1 : \ x(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0, \quad C_2 : \ x(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

e quindi

$$\mathcal{F}: \quad \lambda x(a_1x + b_1y + c_1) + \mu x(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Dunque la generica conica di $\mathcal{F}$ ha equazione

$$x\,[\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2)] = 0$$

e quindi è l'unione della retta base $x = 0$ e di una retta che varia nel fascio di rette generato da s_1 e s_2, ovvero in $\mathcal{G}_Q$.

(d) $P_1 = P_2$. Consideriamo un sistema di riferimento in cui $P_1 = O = (0, 0)$, $r_1: \ x = 0$ e $r_2: \ y = 0$. Allora $\mathcal{F}$ ha equazione

$$\mathcal{F}: \quad \lambda x(a_1x + b_1y) + \mu y(a_2x + b_2y) = 0.$$

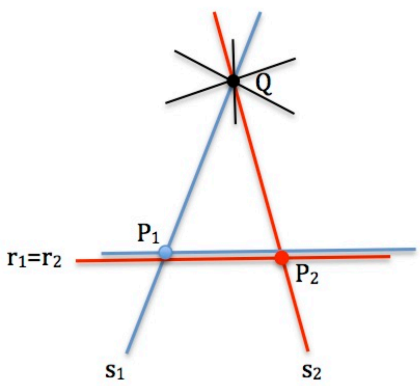
La sua generica conica è

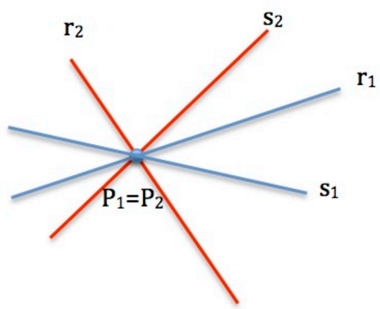
$$C_{\lambda,\mu}: \ \lambda a_1x^2 + \lambda b_1xy + \mu a_2xy + \mu b_2y^2 = 0$$

la cui matrice associata è

$$B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_1 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 \\ 0 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 & \mu b_2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $C_{\lambda,\mu}$ è degenere per ogni $[\lambda, \mu]$. Con un semplice calcolo, si verifica che $O = (0, 0)$ è punto doppio per ogni conica $C_{\lambda,\mu}$, dunque le sue componenti variano nel fascio di rette di centro O, come volevamo. $\square$





Esempio 4.12.3. Determinare l'equazione della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche di $\mathbb{A}^2$ per P_1, P_2, P_3, P_4, specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (-2, 0).$$

Si procede come nell'Esempio 4.12.1, considerando la matrice le cui righe sono le coordinate omogenee dei 4 punti e osservando che tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, invece, il minore costituito dalle righe diverse dalla terza è degenere. Questo significa che i punti P_1, P_2, P_4 sono allineati: infatti appartengono tutti alla retta $r: \ y = 0$. Pertanto ogni conica C contenente tali punti deve contenere la retta r. Quindi $C = r \cup s$, dove s è una qualunque retta per P_3. Le coniche richieste costituiscono dunque un fascio degenere avente r come retta base e P_3 come punto base.

A questo punto si scrive l'equazione del fascio di rette di sostegno P_3:

$$\mathcal{F}_{P_3}: \quad \lambda x + \mu(y - 1) = 0$$

da cui il fascio di coniche richiesto ha equazione

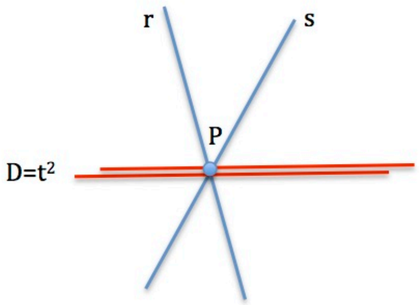
$$y(\lambda x + \mu(y - 1)) = 0.$$

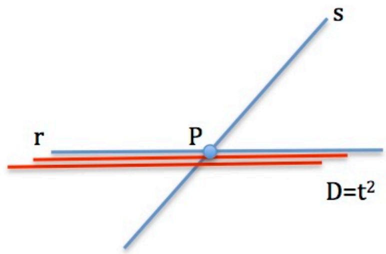
Teorema 4.12.9. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio degenere di coniche generato da due coniche degeneri C e D delle quali almeno $D = t^2$ è doppiamente degenere. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:*

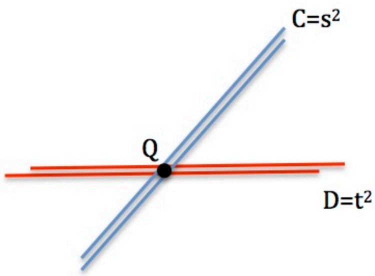
i) *$C = r \cup s$ è semplicemente degenere e $P := r \cap s$. Allora $P \in D$. Inoltre*
- se C e D non hanno componenti comuni allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_P$ e $\mathcal{F}$ ha come unico punto base P, contato 4 volte.
- se C e D hanno una componente comune, ad esempio $C = r \cup t$, allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione t e di una retta appartenente a $\mathcal{G}_P$. In particolare, $\mathcal{F}$ ha t come retta base.

ii) *Anche $C = r^2$ è doppiamente degenere. Allora, posto $Q := t \cap r$, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_Q$ e $\mathcal{F}$ ha come unico punto base Q, contato 4 volte.*

Dimostrazione. Per esercizio (analogo al precedente teorema). □







Indice

Ringraziamenti

Ringrazio il prof. Daniele Zuddas per i numerosi esercizi ed esempi che ha fornito e per l'accurata rilettura di queste Note.