PARTICELLA QUANTISTICA IN CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$

Ricordiamo:

Dato un campo magnetico $\bar{B}$, esso può essere espresso come il rotore del potenziale vettore $\bar{A}$:

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

In meccanica classica la Lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\bar{x}}^2 + e \, \dot{\bar{x}} \cdot \bar{A}$$

Le coord. $\bar{x} = (x, y, z)$ sono le coord. cartesiane della particella.

I momenti coniugati sono

$$\frac{P_n - eA_n}{m}$$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x$$
$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\bar{x}} = \frac{\bar{P} - e\bar{A}}{m}$$
$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z$$

L'Hamiltoniana è

$$\boxed{H(\bar{p}, \bar{x}) = \frac{\left(\bar{p} - e\bar{A}(\bar{x})\right)^2}{2m}}$$

Consideriamo il caso con $\underline{B=0}$.

$$\bar{B}=0 \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{A}=0 \underset{\text{localm.}}{\Longrightarrow} \bar{A}=\bar{\nabla}\chi$$

Classicamente questo vuol dire che la Lagrangiana è

$$L = \frac{m\dot{\bar{x}}^2}{2} + \underbrace{e\,\dot{\bar{x}}\cdot\bar{\nabla}\chi}_{= e\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\dot{x}_i}$$

Qta è un termine di "derivata totale"

che classicamente non influisce sulla dinamica

(che infatti dev'essere la stessa per tutti gli $\bar{A}$

t.c. $\bar{B}=0$)

Classicamente questo è vero sia

per $Q=\mathbb{R}^3$ che per $Q=T^2\times\mathbb{R}$!

Vediamo cosa succede in Meccanica Quantistica.

Siccome $\bar{A}=\bar{\nabla}\chi$, vedo che localmente $\bar{A}$ è

gauge equivalente ad $\bar{A}'=0$: $\bar{A}$ e $\bar{A}'$ sono

connessi da trasf. di gauge con $\alpha=-\chi$.

Qui subentra una sottigliezza: noi stiamo richiedendo

che $\bar{B}=0$, cioè che $\bar{A}$ sia t.c. $\bar{\nabla}\times\bar{A}=0$.

Qto ci dice che SE Q è uno spazio SEMPLICEM.

CONNESSO ($\sim$ tutte le curve chiuse sono contraibili)

allora $\exists\,\chi$ t.c. $\bar{A}=\bar{\nabla}\chi$ globalmente.

Se lo spazio Q NON è sempl. connesso, allora è ancora vero che per ogni aperto U_α semplicem. connesso di Q $\exists\, \chi_\alpha$ def. su U_α t.c. $\bar{A}|_{U_\alpha} = \bar{\nabla}\chi_\alpha$, TUTTAVIA NON esiste in genere nessun χ def. su tutto Q t.c. $\chi|_{U_\alpha} = \chi_\alpha$.

Affinché $\bar{A}$ e $\bar{A}'$ siano GAUGE EQUIVALENTI, deve esistere localm. una α t.c. $\bar{A}' - \bar{A} = \bar{\nabla}\alpha$.

α non deve necessariam. essere globalm. definita, ma $U = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x)}$ lo deve essere!

(Qto per assicurare che la funz. d'onda $\psi'(x)$ sia una buona funzione su Q.)

Nel caso $\bar{B} = 0$, non è detto che esista sempre un $U = e^{i\frac{e}{\hbar}\alpha(x)}$ ben definito t.c. $\bar{A} = \bar{\nabla}\alpha$. Se qto fosse vero, allora $\bar{A}$ sarebbe gauge equiv. a $\bar{A}' = 0$.

Come abbiamo detto sopra, se Q è sempl. connesso qto è sempre vero: tutti gli $\bar{A}$ t.c. $\bar{B} = 0$ sono gauge equivalenti $\longrightarrow$ la situazione è analoga a qla classica: $\bar{B} = 0 \Rightarrow$ una certa dinamica che è la stessa per ogni $\bar{A}$ t.c. $\bar{\nabla} \times \bar{A} = 0$.

Se invece Q non è sempl. conn. bisogna fare attenz. come ora discuteremo per la particella su un cerchio.

Particella quantistica su $Q = S^1$

Consideriamo una particella quantistica che si può muovere su un cerchio S^1 (sistema 1 dim.) di raggio R. Essa ha carica e e può esserci un pot. vettore $\bar{A} = \bar{\nabla}\chi$ (localm.) t.c. $\bar{B} = 0$. In coord. cartesiane

$$L = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 + e\,\dot{\bar{r}}\cdot\bar{A} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) + e\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i}$$

Imponiamo il vincolo, che in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Inoltre abbiamo $\chi(\varphi) \equiv \chi(\bar{r}(\varphi))$ (con abuso di notazione)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = R^2\dot{\varphi}^2 \\ &\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i} = \sum_i \dot{\varphi}\frac{dx_i}{d\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial x_i} = \dot{\varphi}\,\chi'(\varphi) \end{aligned}$$

con qta parametrizzaz., θ è dimensionless!

Facciamo la semplice scelta $\chi(\varphi) = \frac{\hbar\,\theta}{e\,2\pi}\varphi$. Allora la Lagr. è

$$L = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\hbar\theta}{2\pi}\dot{\varphi}$$

Diverse scelte di θ corrispondono a diverse scelte di $\bar{A}$ t.c. $\bar{B} = 0$.

Nella teoria classica, qta Lagrangiana genera la stessa dinamica di $L' = \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2$.

Il momento coniugato a φ è

$$P_\varphi = mR^2\dot{\varphi} + \frac{\hbar\theta}{2\pi} \quad \longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\left(P_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)}{mR^2}$$

L' Hamiltoniana corrispondente è

$$H_\theta = \frac{\left(P_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2}$$

- φ e P_φ sono variabili canonicamente coniugate e diventano operatori: $\hat{\varphi}\,\psi(\varphi) = \varphi\,\psi(\varphi)$ $\quad \hat{P}_\varphi\,\psi(\varphi) = \frac{\hbar}{i}\psi'(\varphi)$

Calcoliamo lo spettro di H_θ :

- Usiamo il fatto che conosciamo le autof. di $\hat{P}_\varphi = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\varphi}$

$$\hat{P}_\varphi \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \hbar n \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

necessario affinché le autofunt. siano periodiche, cioè ben def. sul cerchio.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{in\varphi}\, d\varphi = \delta_{nm}$$

(come nella buca di pot. infinita, le autof. di P_φ sono dei buoni stati quantistici $\in L^2$)

- Quindi :

$$\hat{H}_\theta \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2mR^2}\left(\hat{P}_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \quad E_n^\theta = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- Si vede subito a occhio che per θ diversi ho diversi spettri, quindi dinamiche diverse.

- Se $\theta \to \theta + 2\pi$, lo SPETTRO RIMANE INVARIATO.
Qto avviene in modo non-triviale, infatti
$\theta \to \theta + 2\pi$ shifta efficacemente $n \to n-1$.

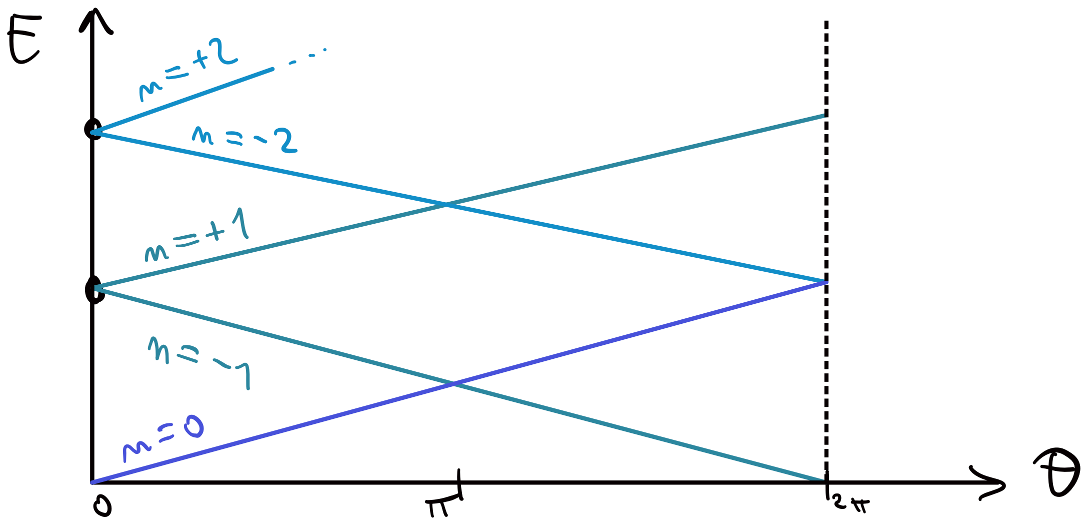
- Se $\theta = 0$
  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} n^2$
  - quando $n \neq 0$ gli autovalori sono degeneri (deg = 2), perché $e^{i|n|\varphi}$ e $e^{-i|n|\varphi}$ sono indip.
  il LIVELLO di MIN. ENERGIA ($n=0$) invece è <u>non deg.</u>

- Se $\theta = \pi$ $\qquad (n+1)^2 \quad \left(-n-1+\frac{1}{2}\right)^2$
  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$
  - i livelli ENERGETICI sono tutti degeneri (deg = 2) con autofunz. $e^{i|n|x/R}$ e $e^{-i|n+1|x/R}$

- Se $\theta \neq 0, \pi$ $\quad 0<\theta<2\pi$

  - $E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2$

  - i livelli energetici sono tutti non-degeneri



Abbiamo visto che per θ diversi, otteniamo una dinamica diversa (diverso spettro dell'Energia)

$\rightsquigarrow$ cioè per $Q = S^1$ il termine di derivata totale influisce sulla dinamica del sistema (a differenza di quanto accade nella teoria classica).