25 / 5 / 2022

Elettromagnetismo

- elettrostatica
- correnti elettriche continue
- ~~correnti variabili e campi magnetici~~ NO!

→ elettrostatica $\qquad e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$

- carica elettrica: elettrone : $-e$; protone : $+e$ } convenzione arbitraria (ma universale)

- la carica di un corpo è pari alla somma delle cariche dei suoi costituenti.
- la carica elettrica si conserva
- a livello macroscopico la materia è generalmente neutra
- a livello microscopico le interazioni elettriche sono molto importanti
- cariche opposte si attraggono, cariche dello stesso segno si respingono
- A livello quantitativo vale la legge di Coulomb; q_1 posta nell'origine esercita su q_2 posta in $\bar{r}$ la forza $\bar{F}_e$

$$\bar{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$$

costante dielettrica relativa (al vuoto) del mezzo considerato $\varepsilon_r \geq 1$ ($=$ nel vuoto)

costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{m^2 N}$

effetto di schermo (polarizzazione) del mezzo (dielettrico)

- Anche per la forza di Coulomb vale il principio di sovrapposizione
- campo elettrico

  se metto q_0 (carica di prova) in un punto P dello spazio ove sia presente $\bar{E}$, allora q_0 sente una forza

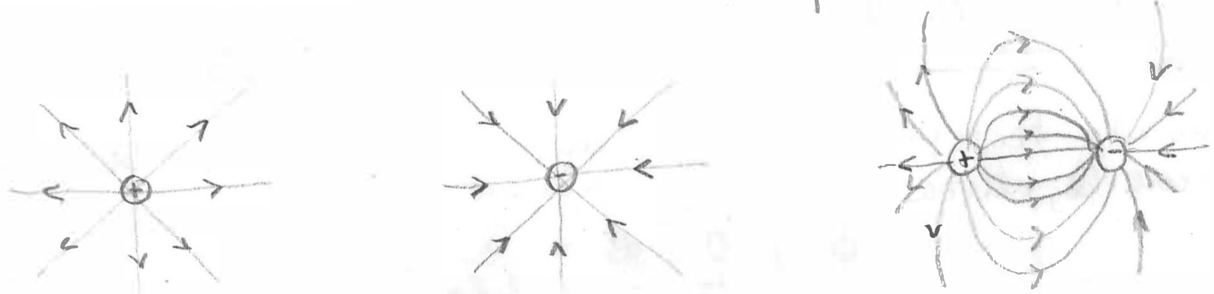
$$\bar{F}_e = q_0\bar{E}$$

da cui

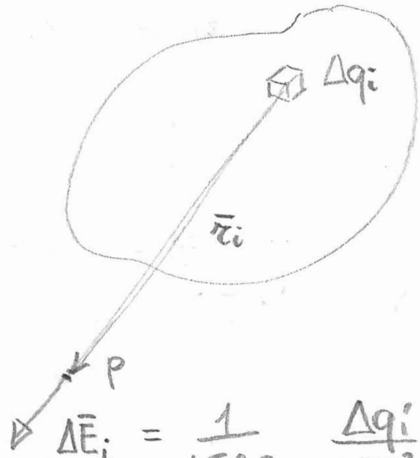
$$\bar{E} = \frac{\bar{F}_e}{q_0}$$

ad es. per 1 carica q posta nell'origine $\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$

- rappresentazione di $\bar{E}$ tramite linee di forza del campo elettrico:



→ calcolo del campo elettrico per una generica distribuzione di carica



$$Q = \Sigma_i \Delta q_i$$

$$\Delta \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

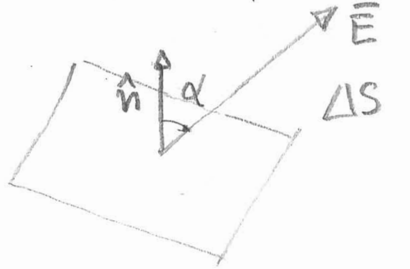
$$\bar{E} \cong \Sigma_i \Delta \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \Sigma_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$$\bar{E} = \lim_{\Delta q_i \to 0} \Sigma_i \Delta \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Se Q è unif. distribuita in un volume V si usa $\rho = \frac{Q}{V}$
" su una superficie S " $\sigma = \frac{Q}{S}$
" lungo una lunghezza ℓ " $\lambda = \frac{Q}{\ell}$

→ teorema di Gauss (molto utile per il calcolo di $\bar{E}$).
(non trattato nel programma AA2022-23)

- def. di flusso di un vettore ($\bar{E}$ in questo caso) attraverso una superficie piana ΔS



$$\Delta\phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \underbrace{\hat{n} \cdot \Delta S}_{\text{definiz.}} = \bar{E} \cdot \Delta\bar{S} = E\,\Delta S \cos\alpha$$

- def. di flusso di un vettore ($\bar{E}$) attraverso una sup. qualsiasi S

$$S = \Sigma_i \Delta S_i$$

S (maiuscolo) superficie

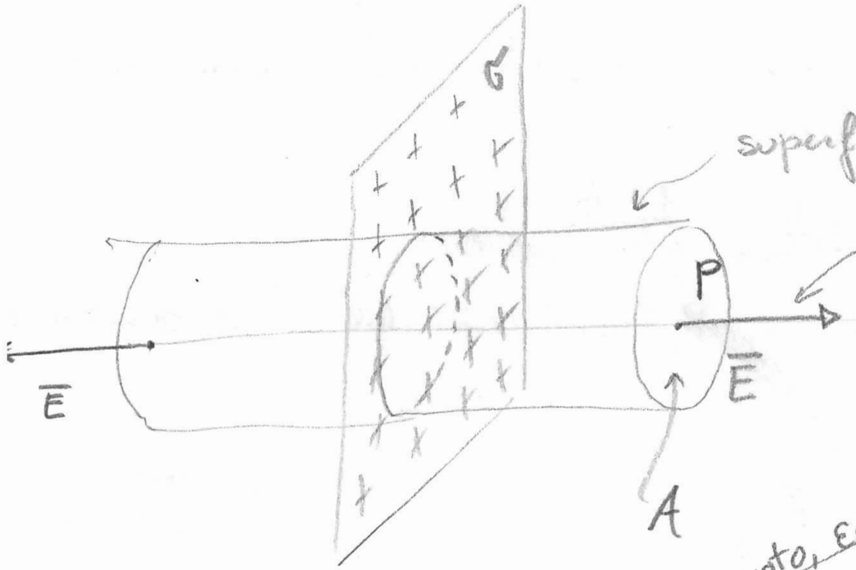
$$\phi(\bar{E}) = \lim_{\Delta S_i \to 0} \Sigma_i E_i \Delta S_i \cos\alpha_i = \int_S \bar{E} \cdot \underbrace{\hat{n}\, dS}_{\text{definizione}} = \int_S \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

- enunciato teorema di Gauss (senza dimostrazione). Se S chiusa contiene Q, allora

sup. chiusa

$$\boxed{\phi(\bar{E}) = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

Usando il teorema di Gauss, troviamo il campo $\vec{E}$ generato nel punto P da un piano infinito di cariche con una densità superficiale di carica σ



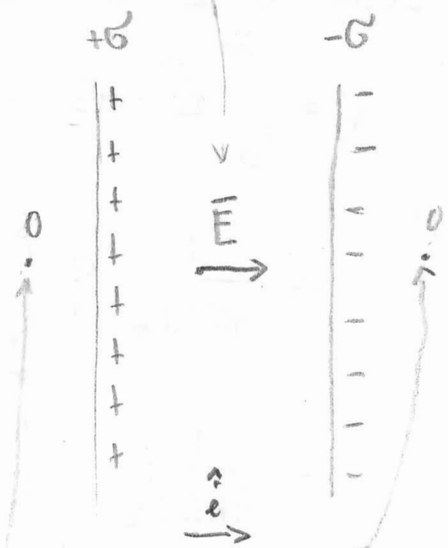
$$\Phi(\bar{E}) = \underset{\text{base}}{EA} + \underset{\text{sup. laterali}}{0} + \underset{\text{altra base}}{EA}$$

$$\Phi(\bar{E}) = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \text{in vuoto, } \varepsilon_r = 1 \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$|\vec{E}|$ non dipende dalla distanza d punto-piano, ed è quindi lo stesso in tutto lo spazio (nel caso ideale di piano infinito).

→ Condensatore a facce piane parallele (pt. 1) $\bar{E} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}$

Le armature del condensatore vengono considerate due piani infiniti, l'uno con densità superficiale di carica $+\sigma$, l'altro con $-\sigma$



Per un condensatore a facce piane parallele, usando il risultato ottenuto per un piano ed il principio di sovrapposizione, si ha
$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}$ all'interno
ed $\bar{E} = 0$ all'esterno (ove i 2 contributi sono uguali ed opposti ed hanno somma nulla)

-------------------------------fine della parte non in programma -------------------------------

→ Energia potenziale elettrica

Le forze elettriche sono conservative, quindi posso definire U tale che:

$$\mathcal{L} = -\Delta U = U_A - U_B$$

↑ lavoro fatto dalle forze elettriche per spostare la carica (di prova) q_0 da A a B

$$\mathcal{L} = \int_A^B \bar{F}_E \cdot d\bar{s} = q_0 \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} \leftarrow \bar{s} \text{ (minuscolo): spostamento}$$

Dalle due equazioni qui sopra resta definito: $\Delta U = -q_0 \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$

Poiché U e ΔU dipendono da q_0, risulta conveniente definire il...

→ Potenziale elettrico

31/5/2022

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} = V_B - V_A$$

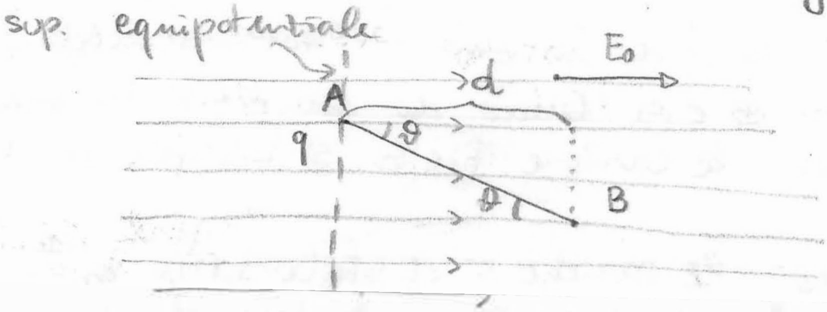
Il potenziale elettrico in un punto P si ottiene dall'eq. precedente con le seguenti sostituzioni

$$B \rightarrow P \qquad A \rightarrow \infty \qquad V_P = -\int_\infty^P \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_P^\infty \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

ed assumendo $V_A = V_\infty = 0$

Il potenziale elettrico V nel punto P rappresenta quindi il lavoro (per unità di carica) fatto dalle forze elettriche per portare una carica di prova da P all'∞, o, equivalentemente, il lavoro (per unità di carica) fatto contro le forze elettriche per portare una carica di prova dall'∞ a P.

→ Esempio: $\vec{E} = \vec{E}_0$ uniforme (in tutta la regione di interesse)



$$\mathcal{L} = q_0 (\bar{E}_0 \cdot \overline{AB}) = q_0 E_0 AB \cos\theta = q_0 E_0 d$$

$$\Delta U = -\mathcal{L} = -q_0 E_0 d$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -E_0 d = V_B - V_A$$

$$V_A - V_B = E_0 d$$

→ Potenziale e campo elettrico

L'equazione che definisce la differenza di potenziale

$$\Delta V = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

per spostamenti infinitesimi diventa:

$$dV = -\bar{E} \cdot d\bar{s} \qquad \text{in 1D: } dV = -E_x\, dx$$

[approfondimento: $\bar{E} = -\text{grad}\, V = -\bar{\nabla} V$] $\qquad E_x = -\dfrac{dV}{dx}$

→ Potenziale di una carica puntiforme e di una distribuzione di carica qualsiasi. ← vedi 63bis (approfondimento)

Da $V_A = -\int_{\infty}^{A} \bar{E} \cdot d\bar{s}$ si ricava (*) che il potenziale in un generico punto distante r da una carica puntiforme q vale

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r}$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r} \qquad \text{per carica infinitesima}$$

$$V = \int_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r} \qquad \text{per una distribuzione di carica qualsiasi}$$

→ Potenziale e lavoro

$$\mathcal{L} = -\Delta U = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

→ Conduttori

metallici: e^- liberi di muoversi (non così negli isolanti)

[elettrolitici: ioni ⊕ e ⊖ liberi di muoversi in una soluzione]

conduttore neutro: le cariche ⊕ e ⊖ si bilanciano esattamente

$Q = 0 \quad V = 0$

conduttore carico: le cariche si distribuiscono sulla superficie

$Q \neq 0 \quad V \neq 0$ è <u>lo stesso</u> in ogni punto del conduttore

in altre parole il conduttore è equipotenziale

[approfondimento $\Rightarrow \vec{E}_{int} = -\bar{\nabla} V = 0$ ← poiché V è uniforme]

Si trova pure che $\dfrac{Q}{V} = \text{cost} = C$ capacità del conduttore

C dipende da forma e dimensioni del conduttore

→ Dimostro che per carica puntiforme q posta in O vale:

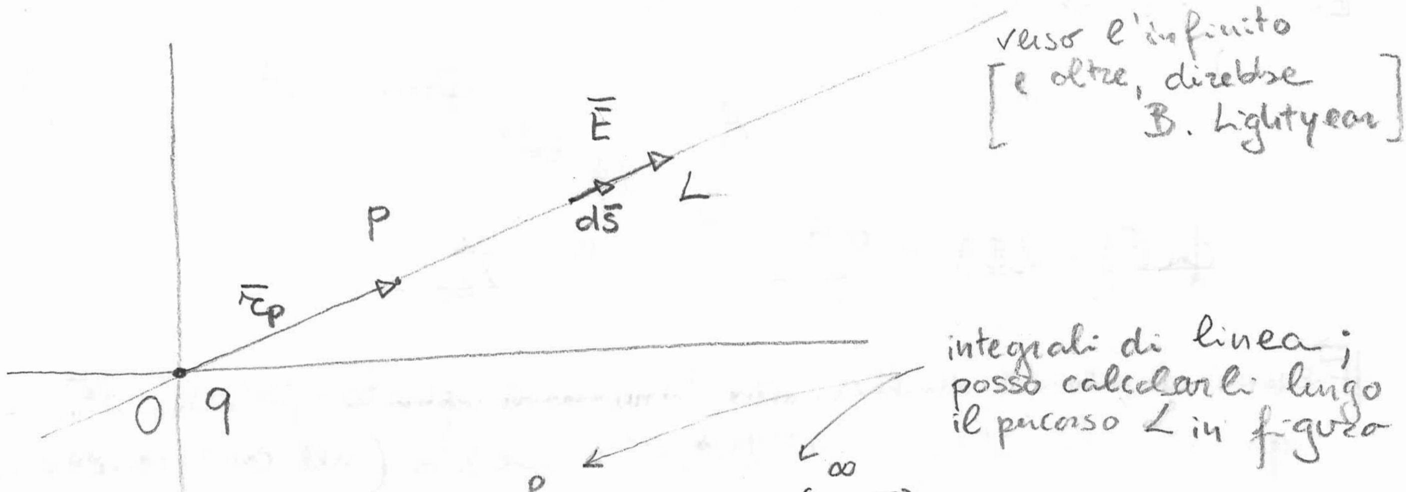
Nota: questa dimostrazione e' fornita come approfondimento per gli studenti che hanno dimestichezza con gli integrali

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r}$$

Dimostrazione: una carica puntiforme q posta in O genera in $\vec{r}$ un campo elettrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Calcolo il potenziale elettrico in P, identificato dal vettore posizione $\vec{r}_P$



integrali di linea; posso calcolarli lungo il percorso L in figura

Per definizione $V_P = -\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{P}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{s}$

Calcolo dell'integrale di linea $\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{s}$ lungo il percorso L in figura: per ogni spostamento infinitesimo $d\vec{s} = dr\,\hat{r}$ $\vec{E}$ e $d\vec{s}$ hanno la stessa direzione e verso, quindi il prodotto scalare $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ assume una forma molto semplice:

$$V = \int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,q\int_P^{\infty}\frac{1}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{\equiv 1}dr$$

integrali di linea

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,q\int_{r_P}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,q\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_P}^{\infty}$$

integrale definito sull'asse reale

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,q\left[\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{r_P}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r_P}$$

da cui, generalizzando $r_P \to r$ la tesi:

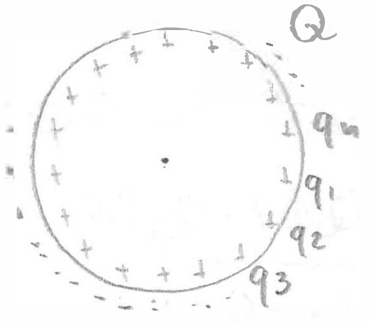
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r}}$$

C si misura in Farad: $1F = \frac{1C}{1V}$

Si usano spesso μF, nF, pF.

---NON in programmma---

→ Esempio: calcolo C per una sfera conduttrice carica

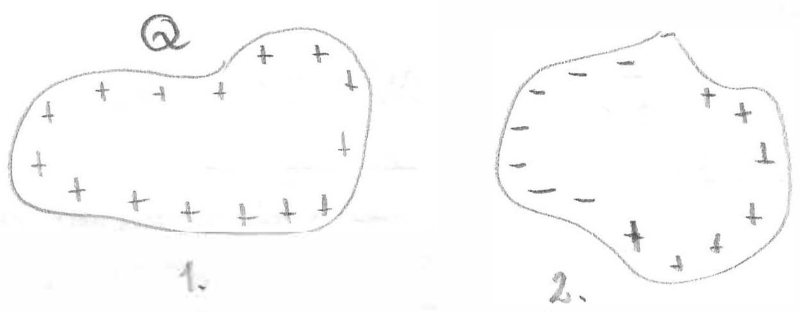


- il potenziale V è lo stesso ovunque
- lo calcolo al centro

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R}+\frac{q_2}{R}+\frac{q_3}{R}+\dots\frac{q_n}{R}\right)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \Rightarrow C = 4\pi R\varepsilon_0$$

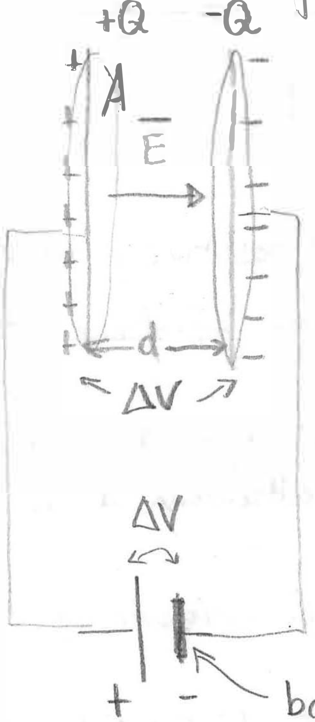
→ Condensatore (in generale)



La presenza di 2. diminuisce il potenziale in 1., quindi ne aumenta la capacità (Q non cambia)

--- FINE PARTE NON in programmma---

→ Condensatori a facce piane parallele (pt. 2)



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

inoltre $\Delta V = Ed$ (per $\bar{E}$ uniformi)

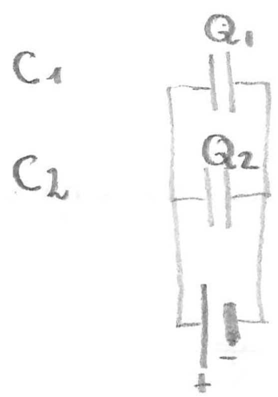
e $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$

quindi

$$C = \frac{Q}{Ed} = \frac{\cancel{Q}}{\cancel{Q}d}\cdot A\varepsilon_0 = \frac{A}{d}\varepsilon_0$$

batteria: genera ΔV (d.d.p, differenza di potenziale) costante (→ generatore di ddp)

→ Condensatori in parallelo



$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ perché le armature dx (o sx) di C_1 e C_2 sono allo stesso pot.

C_{eq} deve accumulare $Q = Q_1 + Q_2$

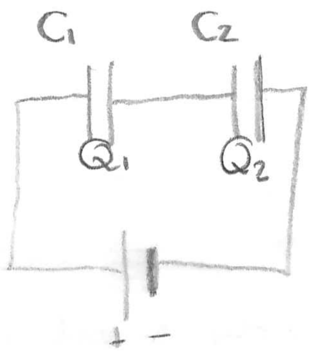
$$C_{eq} = Q/\Delta V = (Q_1 + Q_2)/\Delta V = Q_1/\Delta V + Q_2/\Delta V$$

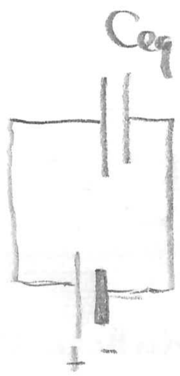
$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = C_1 \Delta V$$
$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = C_2 \Delta V$$

Per N condensatori in parallelo si ha $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N}$

→ Condensatori in serie





$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$
$$Q_1 = Q_2 = Q$$

perché l'armatura dx di C_1 e l'armatura sx di C_2 sono un conduttore neutro.

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \qquad \Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2}$$

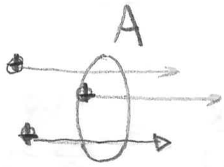
$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

e per N condensatori in serie $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$

→ Corrente elettrica continua

Si considera un moto di cariche elettriche (positive) che produce un flusso di carica netto attraverso una superficie A:



ΔQ è la quantità di carica che attraversa A in Δt

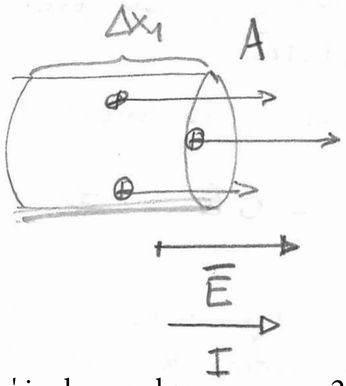
Definisco $I_m = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ intensità media di corrente elettrica

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$ intensità di corrente elettrica

L'unità SI per l'intensità di corrente elettrica è l'Ampere

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

I ha il verso del moto delle cariche positive ⊕, le quali si muovono spinte da un campo elettrico $\overline{E}$:



ATTENZIONE: per noi I non è un vettore; ma parliamo comunque di verso della corrente

--------- il modello che segue NON e' incluso nel programma 2022-2023 e viene lasciato come approfondimento ----------

Sia n = numero di particelle cariche (positive) libere di muoversi per unità di volume

Δx_1 = tratto che ciascuna di queste particelle percorre in Δt

q = carica (qui assunta positiva) portata da ciascuna particella

v_d = velocità (costante) di deriva o di trascinamento con cui si muovono le particelle cariche; $v_d = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$

Allora: $\Delta Q = n\,\Delta x_1 A \cdot q$

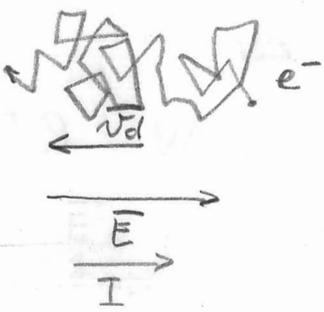
$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n\frac{\Delta x_1}{\Delta t}Aq = n\,v_d\,Aq = I$$

Si definisce inoltre densità di corrente J:

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = n v_d q} \qquad (A)$$

In realtà nei conduttori:

- a muoversi sono gli e^-, che si muovono in verso opposto ad $\vec{E}$, ovvero dal potenziale più basso a quello più alto
- la v_d è il frutto di moltissime collisioni degli e^- liberi con gli atomi del conduttore



→ Leggi di Ohm. Nei conduttori in genere valgono:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \qquad (B)$$

conducibilità

densità di corrente considerata come vettore

$$\boxed{\vec{v}_d = \mu q \vec{E}} \qquad (C)$$

carica del portatore; per l'elettrone $q = -e$

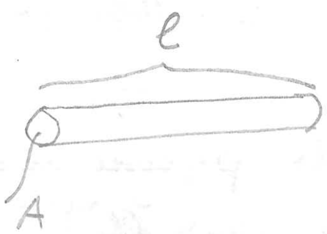
mobilità

Mettendo insieme queste equazioni (in modulo), dalla def. di J:

$$J = \frac{I}{A} \overset{(A)}{=} n v_d q \overset{(C)}{=} n \mu q^2 E \overset{(B)}{=} \sigma E \Rightarrow \boxed{\sigma = n \mu e^2}$$

---------------------------- da qui si ritorna al programma svolto: leggi di Ohm ----------------------------------

Le leggi di Ohm sono enunciate generalmente con riferimento al ΔV che si misura ai capi di un conduttore di sezione A e lunghezza ℓ:



1. $\boxed{\Delta V = RI}$

resistenza, si misura in Ohm

$$1\,\text{Ohm} = \frac{1\,V}{1\,A}$$

2. $\boxed{R = \rho \frac{\ell}{A}}$

resistività (o resistenza specifica)

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

coeff. termico di resistività.

(ulteriori approfondimenti)

Ricordando che per un campo $\vec{E}$ uniforme, $E = \frac{\Delta V}{\ell}$, si ha

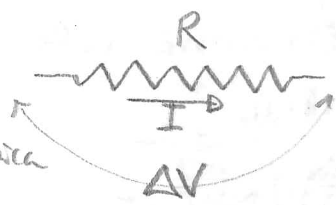
$$I = JA = \sigma E A = \sigma A \frac{\Delta V}{\ell}$$

$$\frac{\sigma A}{\ell} = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{\rho}}$$

confronto con 2.

programma svolto

→ Potenza trasferita ad un resistore (o resistenza)



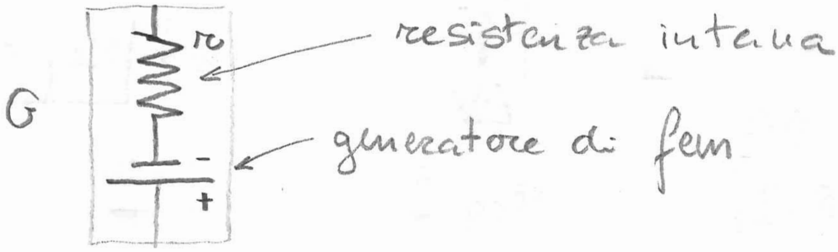
en. potenziale elettrica

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \, \Delta V}{\Delta t} = I \Delta V = R I^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

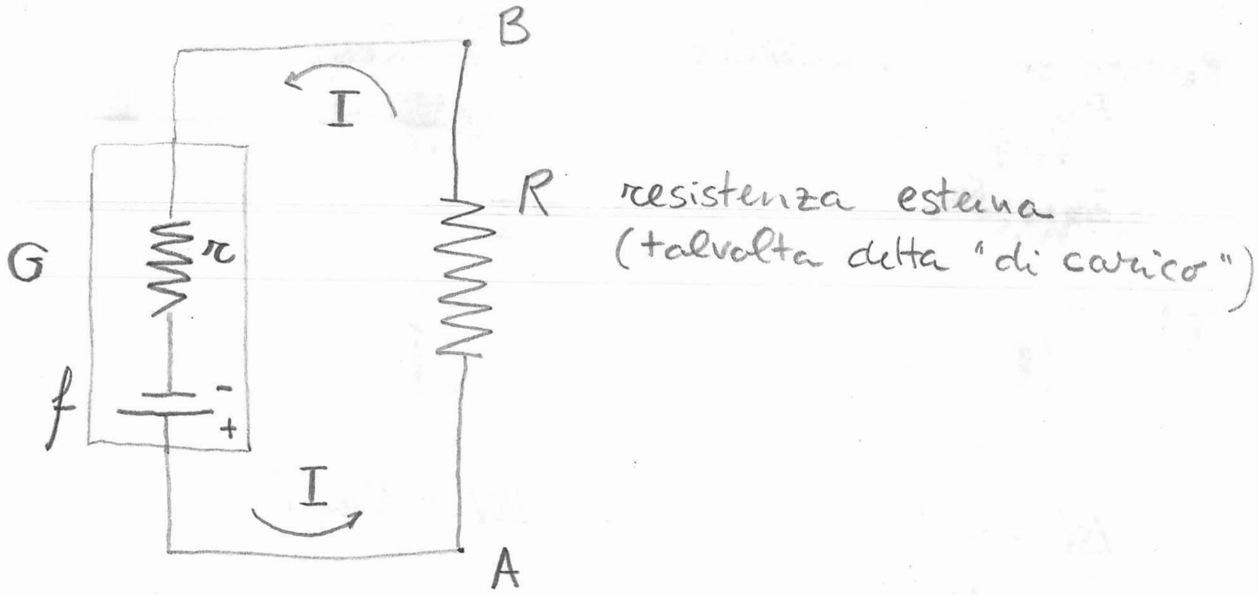
Circuiti in corrente continua

→ f.e.m (forza elettromotrice): lavoro (per unità di carica) che il generatore compie per far percorrere ad una carica positiva l'intero circuito. Simbolo f o $\mathcal{E}$.

- ⚠ non è una forza, si misura in $V = \frac{J}{C}$
- la fem coincide con la ddp che si può misurare ai capi del generatore quando questo NON eroga corrente.
- In effetti il generatore G può essere rappresentato così:



se uso il generatore G in un semplice circuito



$V_A - V_B = f - rI$ (passando per il generatore G)

$V_A - V_B = RI$ (passando attraverso R)

$$f - rI = RI \qquad f = (r+R)I$$

$$I = \frac{f}{r+R}$$

Riprendo:

$$f = (R+r)I$$

$$I = \frac{f}{R+r}$$

se $R \gg r$

$$f \cong RI = \Delta V$$

generatore di tensione
(la ddp. non dipende da I)

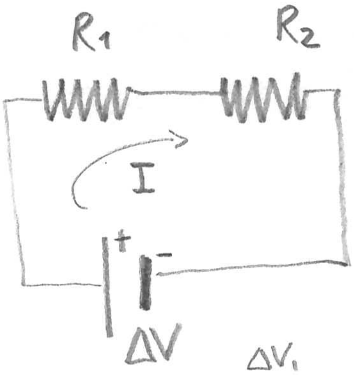
se $R \ll r$

$$I = \frac{f}{r}$$

generatore di corrente
(la I non dipende da ddp)

programma svolto:

→ Resistenze in serie



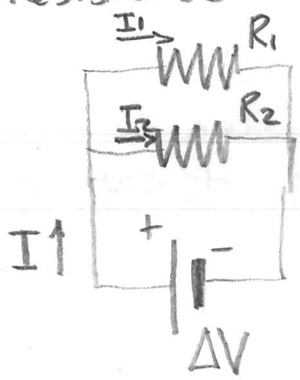
$$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

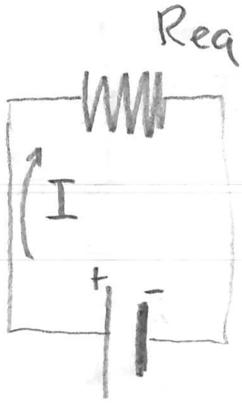
$$\Delta V = \overbrace{R_1 I_1}^{\Delta V_1} + \overbrace{R_2 I_2}^{\Delta V_2} = R_{eq} I$$

$$= (R_1 + R_2) I$$

poiché $I_1 = I_2 = I$

→ Resistenze in parallelo





$$\Delta V_1 = R_1 I_1$$

$$\Delta V_2 = R_2 I_2$$

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

$$\Delta V = R_{eq} I$$

$$I_1 + I_2 = I$$

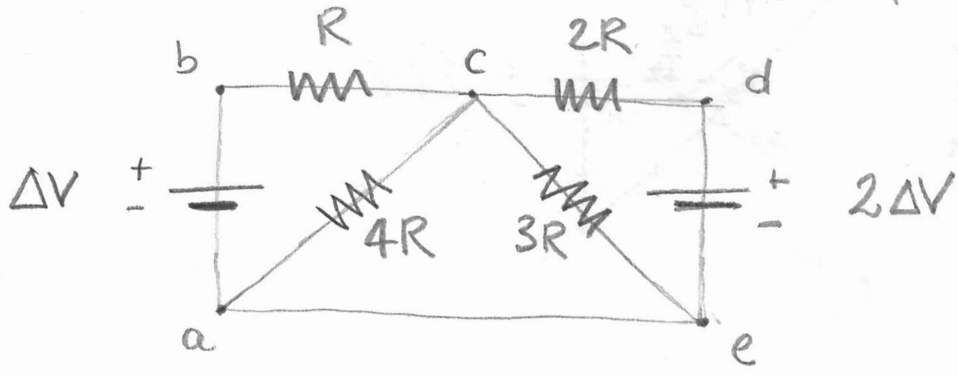
$$\frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Entrambe le formule generalizzabili a n resistori.

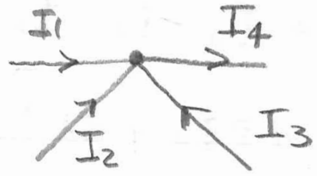
Leggi di Kirchoff *(non in programma)*

Consideriamo un circuito complicato a piacere



a, c, e (dove convergono più di 2 conduttori) sono detti <u>nodi</u>
i percorsi chiusi (ad es. abca, abcea, abcdea) sono detti <u>maglie</u>

① $\sum\limits_{nodo} I = 0$

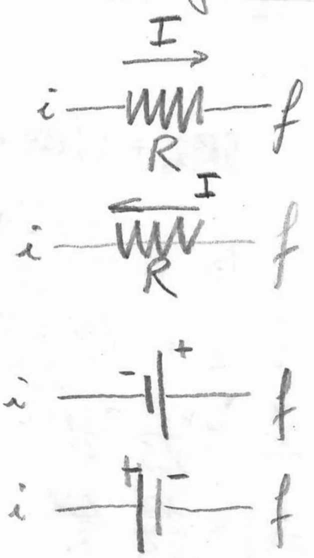


somma algebrica
+ se I entra nel nodo
− se I esce dal nodo

② $\sum\limits_{maglia} \Delta V = 0$

somma algebrica, quindi nel ramo da i a f:

$i \rightarrow f$

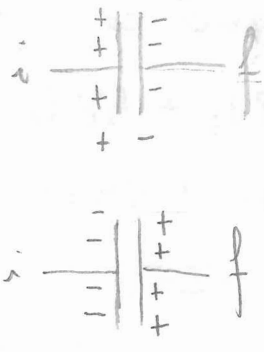


$-RI$

$+RI$

$+\Delta V$

$-\Delta V$



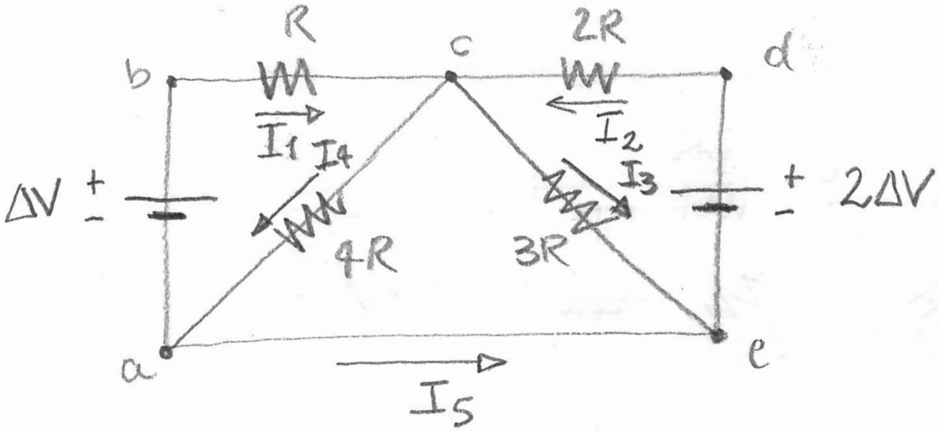
$-\dfrac{Q}{C}$

$+\dfrac{Q}{C}$

[Usando queste regole, nel circuito sopra, se $R = 1\,k\Omega$ e $\Delta V = 250\,V$, si trova una corrente di $50\,mA$ da $a \rightarrow e$]

soluzione a pag. seguente

Soluzione circuito pag. precedente



$\Delta V = 250\ V$

$R = 1\ K\Omega$

$$-I_1 + I_4 - I_5 = 0 \qquad a$$
$$-I_2 + I_3 + I_5 = 0 \qquad e$$
} 2 nodi

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \qquad c$$
(si ottiene sommando a ed e ed è pertanto inutile)

$$\Delta V = RI_1 + 4RI_4 \qquad abca$$
$$2\Delta V = 2RI_2 + 3RI_3 \qquad edce$$
$$\Delta V = RI_1 - 2RI_2 + 2\Delta V \qquad abcdea$$
} 3 maglie

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\ -I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ RI_1 + 4RI_4 = \Delta V \\ 2RI_2 + 3RI_3 = 2\Delta V \\ RI_1 - 2RI_2 = -\Delta V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_5 = -I_1 + I_4 \quad (**) \\ -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0 \qquad I_4 = I_1 + I_2 - I_3 \quad (*) \\ RI_1 + 4R(I_1 + I_2 - I_3) = \Delta V \quad (I) \\ 2RI_2 + 3RI_3 = 2\Delta V \quad (II) \\ RI_1 - 2RI_2 = -\Delta V \quad (III) \end{cases}$$

Proseguo con le ultime 3...

$$\begin{cases} 5RI_1 + 4RI_2 - 4RI_3 = \Delta V \\ RI_1 + 3RI_3 = \Delta V \quad (II + III) \\ RI_1 - 2RI_2 = -\Delta V \end{cases} \qquad \begin{cases} 5RI_1 + 2(\Delta V + RI_1) - \frac{4}{3}(\Delta V - RI_1) = \Delta V \quad (a) \\ I_3 = \dfrac{\Delta V - RI_1}{3R} \quad (b) \\ I_2 = \dfrac{\Delta V + RI_1}{2R} \quad (c) \end{cases}$$

(a) $\left(7 + \frac{4}{3}\right) RI_1 = \left(\frac{4}{3} - 1\right)\Delta V$

$\frac{25}{3} RI_1 = \frac{1}{3}\Delta V$

$I_1 = \frac{1}{25}\frac{\Delta V}{R}$

(b) $I_3 = \frac{\Delta V}{3R}\left(1 - \frac{1}{25}\right) = \frac{8}{25}\frac{\Delta V}{R}$

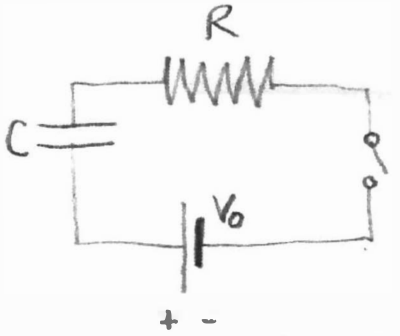
(c) $I_2 = \frac{\Delta V}{2R}\left(1 + \frac{1}{25}\right) = \frac{13}{25}\frac{\Delta V}{R}$

(*) $I_4 = \left(\frac{1}{25} + \frac{13}{25} - \frac{8}{25}\right)\frac{\Delta V}{R} = \frac{6}{25}\frac{\Delta V}{R}$

(**) $I_5 = \left(-\frac{1}{25} + \frac{6}{25}\right)\frac{\Delta V}{R} = \frac{1}{5}\frac{\Delta V}{R} = \frac{50V}{1K\Omega} = 50\ mA$

→ Circuito RC (in programma senza dimostrazioni)

(carica)



S (switch, interruttore)

Si suppone inizialmente il condensatore scarico ed S aperto ($I=0$)

Alla chiusura di S le cariche cominciano a fluire nel circuito, per accumularsi sul condensatore. Il processo termina ($I\to 0$) quando sul condensatore si accumula la carica $Q = CV_0$.
Supponiamo che in un certo istante t della fase di carica la carica accumulata sul condensatore sia $q < Q$, e che circoli ancora una corrente I. [S chiuso a $t=0$]
Allora, (II legge di Kirchoff)

$$V_0 - \frac{q}{C} - IR = 0$$

[tra parentesi, questa eq. vale anche nei casi limite di inizio/fine della carica del condensatore:

inizio	$q\to 0$	$V_0 \simeq IR$	$I \simeq I_0 \equiv \frac{V_0}{R}$
fine	$I \to 0$	$V_0 \simeq \frac{q}{C}$	$q \to Q \equiv CV_0$

]

Tornando a t qualsiasi e ricordando $I = \frac{dq}{dt}$, si ha

$$V_0 - \frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = 0$$

(eq. differenziale di I° a variabili separabili)

>> a questo punto è solo matematica <<

...

$$\frac{dq}{dt} = \frac{CV_0 - q}{RC}$$

$$\frac{dq}{q - CV_0} = -\frac{1}{RC}dt$$

integro e cambio nome alla variabile d'integrazione

$$\int_0^q \frac{dq'}{q'-CV_0} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\left(\frac{q-CV_0}{-CV_0}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

$$-\frac{1}{CV_0}(q - CV_0) = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$-\frac{q}{Q} = e^{-\frac{t}{RC}} - 1$$

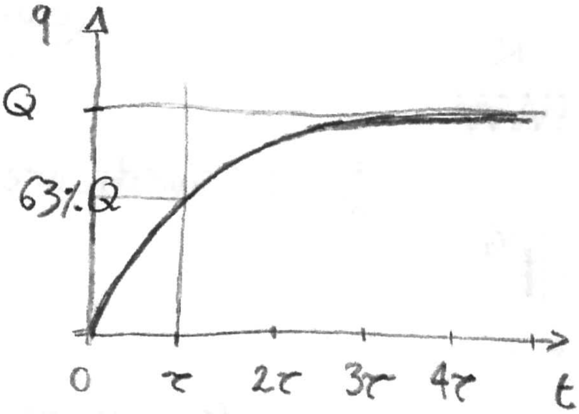
$$\boxed{q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

il calcolo non e' in programma, il risultato si'

Grafico della funzione

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

costante di tempo
$\tau \equiv RC$

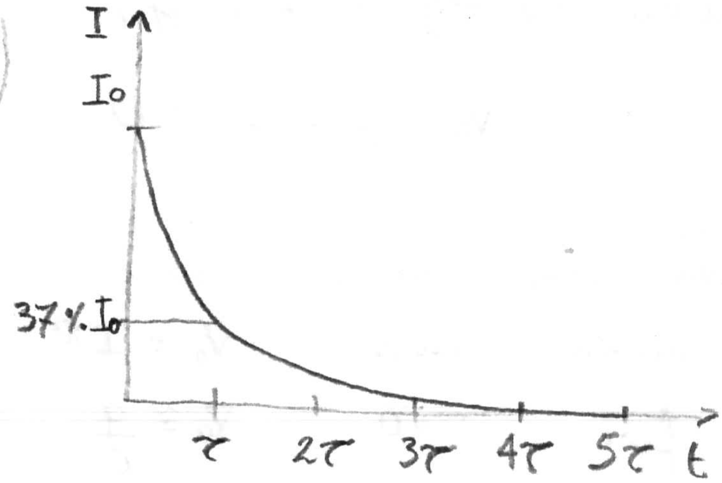


[nota: è bene sapere che:
$e^{-1} \cong 0.37$
$e^{-3} \cong 0.05$
$e^{-5} \cong 0.007$]

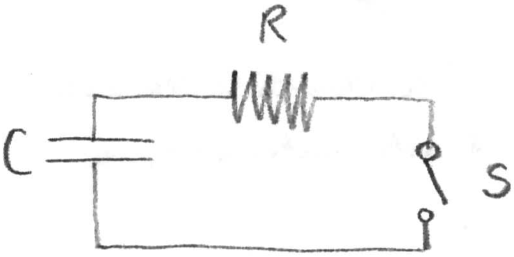
[altra nota:
analogo andamento per $V = \frac{q}{C}$
$$V(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$]

Inoltre ricordando $I = \frac{dq}{dt}$ si ottiene

$$I(t) = Q\left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right)$$
$$= \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$= I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



Scarica



Inizialmente c'è carica $Q = V_0 C$
Non c'è il generatore di tensione!
Chiudo S a $t = 0$.

Di nuovo mi riferisco al generico istante t in cui sul condensatore è rimasta $q < Q$. Dalla 2ª legge di Kirchoff:

$$-\frac{q}{C} - IR = 0$$

$$-\frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

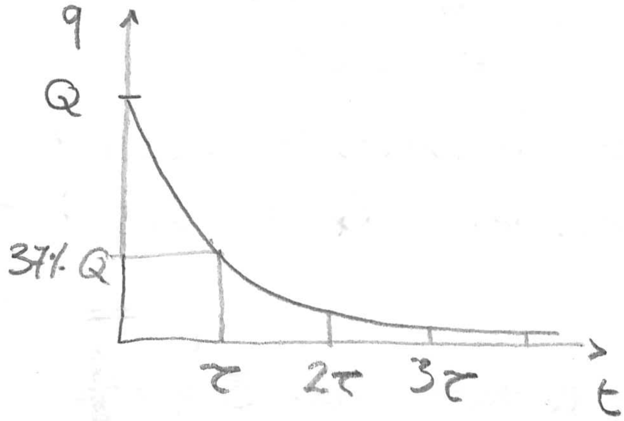
di nuovo il calcolo non e' in programma ma il risultato si'

$$\int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

si considera che per $t=0$, $q=Q$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q = Q\,e^{-\frac{t}{RC}}$$



e differenziando

$$I = \frac{dq}{dt} = Q\,e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right)$$

$$= -I_0\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

la corrente gira nel verso opposto alla fase di carica ma con lo stesso andamento temporale

(non in programma)

Infine calcoliamo la potenza trasferita alla resistenza al tempo t durante la scarica; in generale:

$$P = I\Delta V = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$ (vedi pag. 67)

Nel nostro caso:

$$P = R\left(-I_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 = RI_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}}$$

L'energia trasferita al resistore durante tutto il processo di scarica si può calcolare come:

$$U = \int_0^\infty P\,dt = \int_0^\infty RI_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}}dt = RI_0^2\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$= RI_0^2\,\frac{RC}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}\,d\left(\frac{2t}{RC}\right) = RI_0^2\,\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}\cancel{R^2}\cancel{C}\frac{Q^2}{\cancel{R^2}C^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2}$$

Tale energia U era quindi presente nel condensatore carico. Questo è un risultato generale: ogni volta che un condensatore di capacità C è carico con Q, esso racchiude una energia U