Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 31/5/2024

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(16-x^2-y^2)(y-x-2)}}{\ln(y+x)}.$$
   (b) (2 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(\sqrt{7}-1, \sqrt{7}+1)$, $(-1,1)$.
   (c) (3 punti) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo assoluto e di minimo relativo, giustificando la risposte.
   (d) (2 punti) Si dimostri che l'affermazione $\lim_{(x,y)\to(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})} f(x,y) = \pi$ è falsa.
   (e) (1 punto) L'insieme $F = \{(x,y) : (x,y) \in D, x \le 0, y \ge 0\}$ è limitato? Si giustifichi la risposta.
2. (a) (1 punto) Si determini per quale valore di k l'insieme di livello k della funzione $g(x,y) = 1 - 4x^2 - y^2$ passa per il punto $(1,2)$.
   (b) (2 punti) Si calcoli, se esiste, $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.
3. (a) (2 punti) Data una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ con $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, si diano le definizioni di convergenza puntuale e di convergenza uniforme di tale serie ad una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) (2 punti) Si consideri la successione definita per ricorrenza $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Si determini se tale successione converge o meno e, in caso affermativo, quale sia il suo limite.
   (c) (2 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n}.$$
4. (a) (2 punti) Si dimostri che $4\pi \le \int_D (x^2+y^2+1)dxdy \le 20\pi$, dove D è il cerchio di centro l'origine e raggio 2.
5. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{y^3}{3}$$
su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.
   (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:
$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 2xy$$
.