Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 11 giugno 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) **(4 punti)** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - x_3 + x_4 = \alpha \\ 2x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 + 2\alpha x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \alpha x_4 = \alpha. \end{cases}$$

Senza risolverlo, si mostri che il sistema lineare è compatibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

La matrice completa è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & -1 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & -\alpha & 2\alpha & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \alpha & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 2 & 2 & -\alpha & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & -1 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} II + 2I \\ \rightsquigarrow \\ III + I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 4 & -\alpha-2 & 4\alpha & 1+2\alpha \\ 0 & \alpha+1 & -2 & 1+\alpha & 2\alpha \end{array}\right)$$

Se $\alpha = -1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$: $rg(A|b) = 3 = rg A$

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile per Rouché - Capelli

Se $\alpha \neq -1$: $III - \frac{\alpha+1}{4} II$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 4 & -\alpha-2 & 4\alpha & 1+2\alpha \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} & (\alpha+1)(1-\alpha) & 2\alpha - \frac{(\alpha+1)(1+2\alpha)}{4} \end{array}\right)$$

per $\alpha \neq -1$, i due termini $\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$ e $(\alpha+1)(1-\alpha)$ non sono mai contemporaneamente nulli

$\Rightarrow rg(A|b) = 3 = rg(A) \Rightarrow$ anche per $\alpha \neq -1$, per Rouché - Capelli il sz è sempre compatibile.

(2) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata ad A.

(a) (2 punti) Si calcolino una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$ e una dell'immagine di L_A.

(b) (2 punti) Siano e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ e e_1', e_2', e_3', e_4' i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si dimostri che $\mathcal{A} = (e_3, e_2, e_1 - e_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e che $\mathcal{B} = (e_3 + 2e_4, e_2, e_3, e_1 + e_3)$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(c) (2 punti) Si trovi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L_A)$ la matrice associata a L_A rispetto alle basi $\mathcal{A}$ nel dominio e $\mathcal{B}$ nel codominio.

(d) (3 punti) Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L_A \circ g = 0, \qquad \text{e} \qquad \mathrm{rg}(g) = 1.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{IV} - I]{\overline{II} + 3I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{III} - \overline{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}$

$\mathrm{rg} A = \dim \mathrm{Im}\, L_A = 2$; una base di L_A è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \ker L_A = 3 - \mathrm{rg} A = 1$; eq. per $\ker L_A$:

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$; le soluzioni sono le stesse di $\tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, cioè $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$

una base di $\ker L_A$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\mathcal{A}$ è base $\Leftrightarrow$ i suoi vettori sono LIN. INDIP.; la matrice delle coordinate dei vettori di $\mathcal{A}$ nella base canonica è: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, che ha $\det = -1 \neq 0$

Analogamente la matrice delle coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ è: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che ha $\det = 2 \neq 0$

(c) $L_A(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4 \\ c_2 \\ c_1 + c_3 + c_4 \\ 2c_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = -5, \; c_3 = -\frac{7}{2} \quad c_4 = 1$

$L_A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4 \\ c_2 \\ c_1 + c_3 + c_4 \\ 2c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 0, \; c_2 = 2, \; c_3 = 2, \; c_4 = 0$

$L_A(e_1 - e_3) = L_A(e_1) - L_A(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = L(e_2)$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \\ -7/2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Vogliamo che sia $L_A \circ g = 0$, quindi $\mathrm{Im}\, g \subseteq \ker L_A$, e siccome vogliamo anche $\dim \mathrm{Im}\, g = 1 = \dim \ker L_A$ deve essere $\mathrm{Im}\, g = \ker L_A$. Come g possiamo scegliere, ad esempio, l'unica applicazione lineare g t.c.

$g(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; g(e_2) = g(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verifico le richieste: $L_A(g(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3)) = L_A(c_1 g(e_1) + c_2 g(e_2) + c_3 g(e_3)) = L_A\left(c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = c_1 \cdot L_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

inoltre $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Span}(g(e_1), g(e_2), g(e_3)) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, g = 1$.

(3) Si consideri la matrice

$$C_d = \begin{pmatrix} 1 & d & -1 \\ 0 & 0 & 3d^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) **(3 punti)** Si determinino i valori di $d \in \mathbb{R}$ per cui C_d è diagonalizzabile.

(b) **(3 punti)** Per $d = 1$ si determini un base di autovettori per L_{C_1}.

(a) $p_{C_d}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & d & -1 \\ 0 & -x & 3d^2 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = (1-x)(x^2-3d^2) \overset{!}{=} (1-x)(x-\sqrt{3}d)(x+\sqrt{3}d)$

Se $d \neq 0$ e $d \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, abbiamo 3 autovalori distinti $\Rightarrow C_d$ è diagonalizzabile

- Se $d=0$: $p_{C_0}(x) = (1-x)x^2$, $S_p = \{1, 0\}$; $m_a(1) = 1 = m_g(1)$

$m_a(0) = 2$; calcolo $m_g(0)$:

$m_g(0) = \dim \mathrm{Aut}(0) = 3 - \mathrm{rg}\, C_0 = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \neq m_a(0)$

$\Rightarrow$ NON è diagonalizzabile per $d=0$

- se $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $p(x) = -(x-1)^2(x+1)$, $S_p = \{1, -1\}$, $m_a(-1) = 1 = m_g(-1)$ &

$m_a(1) = 2$; calcolo $m_g(1)$:

$m_g(1) = \dim \mathrm{Aut}(1) = 3 - \mathrm{rg}(C_{1/\sqrt{3}} - I_3) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \neq m_a(1)$

$\Rightarrow$ non è diagonalizzabile per $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- se $d = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $p(x) = -(x-1)^2(x+1)$, $S_p = \{1, -1\}$, $m_a(-1) = 1 = m_g(-1)$

$m_a(1) = 2$; calcolo $m_g(1)$:

$m_g(1) = \dim \mathrm{Aut}(1) = 3 - \mathrm{rg}(C_{-1/\sqrt{3}} - I_3) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$

NON è diagonalizzabile

(b) $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $p_{C_1}(x) = (1-x)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Eq. per $\mathrm{Aut}(1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$; base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eq. per $\mathrm{Aut}(\sqrt{3})$: $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} (1-\sqrt{3})x + y - z = 0 \\ y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$; base $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Eq. per $\mathrm{Aut}(-\sqrt{3})$: $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} (1+\sqrt{3})x + y - z = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$; base $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ una base di autovettori è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(4) **(6 punti)** Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Siano $v_1, \dots, v_t$ dei vettori di V. Si dimostri che se $f(v_1), \dots, f(v_t)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots, v_t$ sono linearmente indipendenti.

Cons. una combinazione lineare $a_1 v_1 + \dots + a_t v_t = 0_V$; allora vale $f(a_1 v_1 + \dots + a_t v_t) = f(0_V)$

Si ha : $f(0_V) = 0_W$, perché f è lineare

inoltre: $f(a_1 v_1 + \dots + a_t v_t) = a_1 f(v_1) + \dots + a_t f(v_t)$ perché f è lineare

Quindi : $a_1 v_1 + \dots + a_t v_t = 0 \Rightarrow a_1 f(v_1) + \dots + a_t f(v_t) = 0$; i vettori $f(v_1), \dots, f(v_t)$ sono linearmente indipendenti per ipotesi

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_t = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_t$ sono linearmente indipendenti

(5) **(6 punti)** Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Si dimostri che se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori a due a due ortogonali, allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

$v_1, \dots, v_k$ sono a 2 a 2 ortogonali, cioè $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$, e sono tutti non nulli

Cons. $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0_V$

allora $\langle a_1 v_1 + \dots + a_k v_k, v_i \rangle = \langle 0_V, v_i \rangle \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

per bilinearità

$$a_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0} + \dots a_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} + \dots + a_k \underbrace{\langle v_k, v_i \rangle}_{=0} = 0$$

perché $v_i \neq 0_V$

$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k \quad \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ sono LIN. INDIP.