Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2023-2024, primo appello estivo

COGNOME ________________ **NOME** ________________

N. Matricola ________________ **Anno di corso** ________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty}(1+x-\sqrt{x^2+1})^x$

$(1+x-\sqrt{x^2+1})^x = e^{x\lg(1+x-\sqrt{x^2+1})}$

Poi $\lg(1+x-\sqrt{x^2+1}) = \lg\left[x\left(1+\frac{1}{x}-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] = \lg(x) + \lg\left(\cancel{1}+\frac{1}{x}-\cancel{1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= \lg x + \lg\left(\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \cancel{\lg x} + \cancel{\lg x^{-1}} + \lg\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o(x^{-1}) \Longrightarrow x\lg(1+x-\sqrt{x^2+1}) = x\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o(x^{-1})\right) \xrightarrow{x\to+\infty} -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \; = e^{-\frac{1}{2}}$

- si calcoli $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\int_x^{2x}\tan(t^{-1})dt$; $0<\frac{2}{\pi}<\frac{\pi}{2}$. Siccome $\tan(t^{-1})$ è continua per $0<t^{-1}<\frac{\pi}{2} \iff \frac{2}{\pi}<t$, cioè siccome $\tan(t^{-1})$ è continua in $\left(\frac{2}{\pi},+\infty\right)$, in particolare è continua in $\frac{\pi}{2}$. Risulta che il limite è $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\tan(t^{-1})dt$ che non si può calcolare direttamente

- si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \int_{x^{-1}}^{\sqrt{x}}\cosh\left(\log\left(t+t^3\right)\right)dt$;

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cosh\left(\lg\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)\right) + x^{-2}\cosh\left(\lg\left(x^{-1}+x^{-3}\right)\right)$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x+1) - \arctan(x)$$

• si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; Dominio $x > -1$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \lg(x+1) = +\infty$$

Notare che $f(0) = 0$

• si calcoli $f'(x)$, si trovino gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 + \cancel{1} - x - \cancel{1}}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(1+x^2)}$$

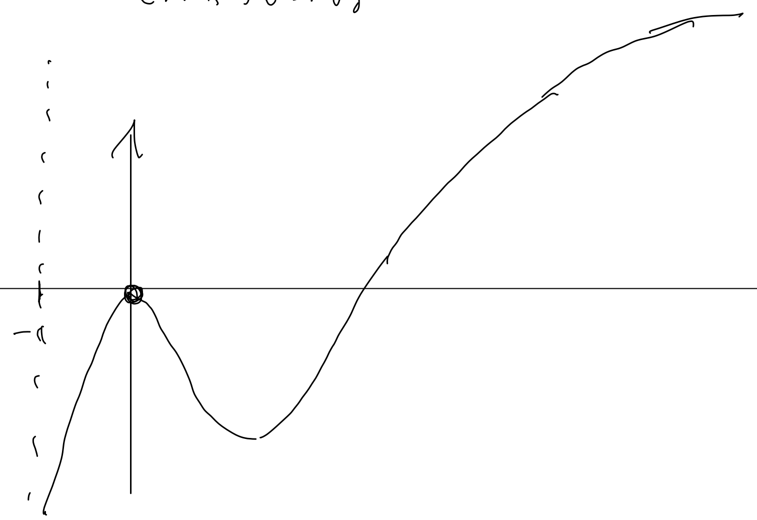
I punti critici sono $x = 0, 1$, $f'(x) \geq 0$ per $-1 < x < 0$ e $x > 1$, e $f'(x)$ per $0 < x < 1$, quindi 0 massimo locale ed 1 minimo locale

• si calcoli $f''(x)$ e si trovi dove e' concava e dove e' convessa; Ci aspettiamo almeno due punti di ~~flesso~~ visto vicino a 0 è concavo, vicino ad 1 è convesso e per $x \gg 1$ $f(x) \sim \lg(x)$ è concavo

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-(1+x^2)^2 + 2x(x+1)^2}{(1+x^2)^2(x+1)^2} = \frac{-1-2x^2-x^4+2x^3+4x^2+2x}{(1+x^2)^2(x+1)^2}$$

• si tracci il grafico .

$$= \frac{-x^4+2x^3+2x^2+2x-1}{(1+x^2)^2(x+1)^2}$$



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$R(x) = \frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$, $A = \frac{x}{x^2-x+1}\Big|_{x=-1} = \frac{-1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$ da $A+B=0$ che segue da $\lim_{x\to+\infty} x R(x) = 0$, $R(x) = \frac{-\frac{1}{3}(x^2-x+1)+(\frac{1}{3}x+C)(x+1)}{x^3+1} = \frac{\cdots + \left(C-\frac{1}{3}\right)}{x^3+1}$ Termine costante

$\Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{3} \lg \frac{x^2-x+1}{x+1}\Big]_1^{+\infty} - \frac{1}{6}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\lg\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{6}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \frac{du}{\frac{3}{4}(u^2+1)}$

$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$

$= +\frac{1}{\sqrt{3}}\lg 2 - \frac{4}{\sqrt{3}\,9} \arctan u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty}$ ecc

- si calcoli le primitive $\int \sin^4(x)dx$;

$\int \left(\frac{1-\cos(2x)}{4}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\int (1-\cos(4x))dx$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

- si stabilisca se $\underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}_{f(x)}$ e' integrabile in $(0,+\infty)$;

La funzione si estende come continua in 0 ponendo $f(0) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \Longrightarrow$ per confronto asintotico $f \in L[1,+\infty)$

- si stabilisca se $x\sin(x^3)$ e' integrabile in $[0,+\infty)$.

$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R x\sin(x^3)\,dx$

$x = y^{\frac{1}{3}}$

$y = x^3$ $\quad dy = 3x^2 dx$

$dx = \frac{1}{3}\frac{1}{x^2}dy = \frac{1}{3}\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy$

$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{3}\int_0^{R^3} y^{\frac{1}{3}} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{2}{3}}} dy \in \mathbb{R}$

perchè $\frac{\sin(x)}{x^{\frac{1}{3}}}$ e' integrabile in $[0,+\infty)$

(abbiamo visto che $\frac{\sin(x)}{x^p}$ lo è $\forall\, p > 0$)

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 6 di $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin(t)}{1+t^5} dt$.

posti $g(t) = \frac{\sin(t)}{1+t^5} = \frac{1}{1+t^5}\left(1 - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right) = 1 - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)$

da $\frac{1}{1+t^5} = 1 - t^5 + o(t^5) = 1 + o(t^4)$. Allora

$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,dt = \int_0^{x^2} \left(1 - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right) =$

$= x^2 - \frac{(x^2)^4}{4 \cdot 3!} + o(x^6) = \underbrace{x^2 - \frac{x^6}{4!}} + o(x^6)$

Segue che $P_6(x) =$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $\underbrace{y'' + y}_{L[y]} = e^x$ con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione generale dell'omogenea è $y_h = A\sin(x) + B\cos x$

Soluzione particolare è $y_p = C e^x$ dove

$L[Ce^x] = C\,L[e^x] = C\,p(1)\,e^x = e^x$

dove $p(r) = r^2 + 1 \Rightarrow 2C = 1 \quad C = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2} e^x$

$y_g = A\sin(x) + B\cos(x) + \frac{1}{2}e^x$.

La nostra soluzione y ha questa forma per

$y(0) = B + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$y'(0) = A + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$y = \frac{\sin(x) + \cos(x) + e^x}{2}$