Corso di Studi in Matematica

Corso di GEOMETRIA 2 [037SM]

Anno Accademico 2023/24

PROGRAMMA

1. Geometria affine

1.1. Spazi affini

Assiomi di spazio affine su uno spazio vettoriale, esempi. Traslazioni. Riferimento affine.

1.2. Sottospazi affini e loro intersezioni

Sottospazi affini. Giacitura di un sottospazio affine. Esempio delle soluzioni di un sistema lineare. Intersezione di sottospazi, condizione perché sia non vuota.

1.3. Sottospazi paralleli e sghembi

Sottospazi paralleli. Sottospazi sghembi. Possibili posizioni reciproche di due sottospazi. Casi particolari: posizione reciproca di due sottospazi in $\mathbb{A}^2$ e $\mathbb{A}^3$.

1.4. Equazioni parametriche di sottospazi affini

Sottospazio generato. Punti affinemente indipendenti. Equazioni parametriche di sottospazi affini.

1.5. Equazioni cartesiane di sottospazi affini

Equazioni cartesiane di sottospazi vettoriali. Equazioni cartesiane di sottospazi affini.

1.6. Calcolo della posizione reciproca di sottospazi

Calcolo esplicito nei casi di equazioni cartesiane e di equazioni parametriche nel piano e nello spazio.

1.7. Fasci di rette e fasci di piani

Fasci di rette propri e impropri nel piano. Loro equazioni cartesiane. Appartenenza di una retta a un fascio. Fasci di piani.

1.8. Applicazioni affini e affinità

Applicazioni affini e applicazione lineare soggiacente. Isomorfismi affini. Affinità. Teorema di determinazione di una affinità.

1.9. Gruppi di trasformazioni affini

Gruppo $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$. Gruppi di trasformazioni affini. Le traslazioni come uniche affinità di parte lineare banale. Stabilizzatore di un punto, omotetie. Teorema di fattorizzazione di un'affinità.

1.10. Equazioni di affinità e cambi di riferimento

Equazioni di affinità (forma vettoriale, forma scalare, forma matriciale). Cambio di coordinate affini rispetto a due sistemi di riferimento.

1.11. Proprietà affini

Nozione di proprietà affine. Le affinità conservano sottospazi affini, la loro dimensione, il parallelismo. Nozione di insiemi affinemente equivalenti. Teorema di determinazione di un'affinità di $\mathbb{A}^n$ mediante due $(n+1)$ - uple di punti affinemente indipendenti. Richiami su somma diretta e proiezioni su addendi diretti di uno spazio vettoriale. Proiezione parallela a un sottospazio affine.

1.12. Spazi affini reali

Cenni su spazi affini reali: semiretta, segmento, triangolo, k-simplessi, insiemi convessi. La convessità è una proprietà affine reale.

2. Geometria euclidea

2.1. Spazi vettoriali euclidei

Richiami su forme bilineari e sequilineari. Prodotto scalare reale e hermitiano complesso. Richiami su spazi vettoriali euclidei (reali e complessi). Norma, disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare. Ortogonalità tra vettori e tra sottospazi. Angoli tra vettori.

2.2. Spazi affini euclidei

Definizioni di spazio affine euclideo e unitario. Spazio euclideo canonico e di spazio unitario canonico. Ortogonalità tra sottospazi euclidei. Sistemi di riferimento cartesiani. Nozione di perpendicolarità tra sottospazi. Angolo tra due rette. Angolo tra una retta e un iperpiano.

2.3. Distanze negli spazi affini euclidei

Distanza fra 2 punti e fra due sottoinsiemi di $\mathbb{E}^n$. Proiezioni ortogonali su sottospazi euclidei. Distanza punto-sottospazio. Formula della distanza punto-iperpiano. Distanza fra due sottospazi paralleli. Distanza fra due rette sghembe in $\mathbb{E}^3$: retta di minima distanza e segmento di minima distanza.

2.4. Automorfismi di spazi vettoriali euclidei

Automorfismi ortogonali di uno spazio vettoriale euclideo e loro caratterizzazioni. Gruppo ortogonale $O(n)$ e il suo sottogruppo ortogonale speciale $SO(n)$. Simmetria rispetto a un iperpiano. Descrizione di $O(2)$: matrici di rotazione e di simmetria; loro significato geometrico. Composizioni di rotazioni e simmetrie.

2.5. Isometrie degli spazi euclidei

Isometrie di uno spazio euclideo o unitario. Isometrie come affinità che conservano la distanza e gli angoli. Sottospazi stabili e invarianti per un'affinità. I sottospazi affini aventi un autospazio come giacitura sono stabili. Isometrie della retta euclidea.

2.6. Classificazione delle isometrie del piano Nozione di isometria diretta e inversa. Nozioni di rotazione di dato angolo e centro, di riflessione e di glissoriflessione del piano euclideo. Teorema di classificazione delle isometrie del piano. Ogni isometria del piano è prodotto di riflessioni. Teorema di classificazione delle isometrie dello spazio (solo enunciato).

3. Geometria proiettiva

3.1. Spazi proiettivi

Introduzione dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Definizioni equivalenti. Sistemi di riferimento proiettivi e cambi di riferimento. Punti fondamentali. Sottospazi proiettivi, dimensione e codimensione. Intersezione di sottospazi. Relazione di Grassmann.

3.2. Equazioni cartesiane

Equazioni cartesiane di iperpiani proiettivi e di sottospazi di dimensione qualunque. Sottospazio proiettivo generato da un sottoinsieme e da punti. Punti indipendenti. Punti in posizione generale. Nello spazio proiettivo n-dimensionale $n + 2$ punti in posizione generale possono essere presi come punti fondamentali e punto unità di un riferimento proiettivo.

3.3. Equazioni parametriche

Sottospazio proiettivo generato da punti indipendenti: equazioni parametriche. Passaggio alle equazioni cartesiane.

3.4. Fasci di iperpiani

Fascio rette nel piano: centro, equazione e generatori. Fascio di piani nello spazio: sostegno, equazione e generatori. Caso generale: fascio di iperpiani con luogo base di codimensione 2.

3.5. Completamento di $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$

Costruzione per $n = 1$, $n = 2$ e caso generale. Immersioni di $\mathbb{A}^n$ in $\mathbb{P}^n$ come carte affini. Iperpiano all'infinito. Passaggio dalle coordinate omogenee a quelle affini e viceversa. Chiusura proiettiva di iperpiani affini e loro punti impropri. Iperpiani affini paralleli hanno gli stessi punti impropri. Punti all'infinito di un iperpiano come direzioni della sua giacitura. Chiusura proiettiva di sottospazi affini. Punti impropri di sottospazi affini paralleli. Interpretazione dei fasci impropri di rette nel piano affine.

3.6. Isomorfismi proiettivi e proiettività

Isomorfismi proiettivi e proiettività. Gruppo $PGL(V)$ e sua caratterizzazione come quoziente di $GL(V)$. Teorema fondamentale sulle proiettività. Esempio nel caso di $\mathbb{P}^1$.

4. Coniche

4.1. Coniche nel piano euclideo

Parabola, ellisse e iperbole come luoghi geometrici di $\mathbb{E}^2$ e loro equazioni. Rette e punti notevoli di parabola, ellisse, iperbole. Assi e centri di simmetria. Conica generale come luogo degli zeri di un'equazione di secondo grado in due variabili a coefficienti reali. Coniche degeneri e non degeneri. Matrici completa e della forma quadratica di una conica. Equazione matriciale di una conica.

4.2. Forma canonica: traslazioni

Forma canonica delle coniche non degeneri e degeneri. Coniche doppiamente e semplicemente degeneri. Metodo del completamento dei quadrati: forma canonica di una conica senza monomio xy via traslazioni.

4.3. Forma canonica: rotazioni

Teorema sul cambiamento delle matrici di una conica attraverso un'isometria diretta di $\mathbb{E}^2$. Teorema di esistenza della forma canonica di una conica euclidea.

4.4. Classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2$

Invarianti di una conica rispetto alle isometrie dirette. Classificazione delle coniche via i determinanti delle matrici associate. Metodo rapido di riduzione a forma canonica. Teorema di classificazione delle coniche nel piano euclideo reale. Caso complesso.

4.5. Studio di una conica in forma generale

Coniche in forma generale: proprietà invarianti per isometrie. Centro come unico centro di simmetria. Determinazione di centro e assi di una conica a centro. Direzione dell'asse di una parabola.

4.6. Coniche nel piano affine

Nozione di conica affine. Intersezioni retta-conica in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Retta tangente a una conica non degenere in un suo punto. Molteplicità di intersezione di retta e conica in un punto. Vettore tangente e vettore normale. Equazione della retta tangente a una conica non degenere in un suo punto. Rette tangenti a una conica non degenere per un punto esterno.

4.7. Punti singolari di una conica

Nozione di punto singolare. Retta tangente a una conica in un suo punto qualunque. Caratterizzazione delle coniche non degeneri, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri attraverso i punti singolari. Vertice e asse di una parabola in $\mathbb{E}^2$.

4.8. Classificazione delle coniche affini su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$

Rango è invariante affine di una conica. Matrici congruenti. Teorema del cambiamento delle matrici di una conica affine attraverso un'affinità. Classificazione delle coniche affini (reali e complesse). Immersione di $\mathbb{A}^2$ in $\mathbb{P}^2$ e omogeneizzazione di polinomi. Chiusura proiettiva e punti impropri di una conica affine. Classificazione delle coniche non degeneri via i loro punti impropri.

4.9. Coniche proiettive

Equazione di una conica in $\mathbb{P}^2$ e matrice associata. Teorema del cambiamento di matrici di una conica proiettiva via una proiettività. Equivalenza proiettiva. Il rango della matrice di una conica è invariante proiettivo. Richiami su teorema di Sylvester per matrici simmetriche. Teoremi di trasformazione ad assi principali (casi complesso e reale). Segnatura di una matrice simmetrica reale. Teoremi di classificazione delle coniche proiettive su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$. Intersezioni retta-conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

4.10. Dualità e sistemi lineari

Il piano proiettivo duale $(\mathbb{P}^2)^*$: corrispondenze retta-punto e punto-retta. Fasci di rette: loro rappresentanti in $(P^2)^*$. Lo spazio duale $(\mathbb{P}^n)^*$. Corrispondenza punto-iperpiano. Sistemi lineari di iperpiani. Condizioni lineari indipendenti sugli iperpiani di $\mathbb{P}^n$. Punti proiettivamente indipendenti impongono condizioni lineari indipendenti.

4.11. Fasci di coniche

Lo spazio $\mathbb{P}^5$ parametrizzante le coniche del piano. Nozione di sistema lineare di coniche. Condizioni lineari sulle coniche. Esempio: passaggio per uno o più punti. Due, tre, quattro punti in posizione generale impongono sulle coniche altrettante condizioni indipendenti. Nozione e equazione di un fascio di coniche. Generatori. Possibili coniche degeneri in un fascio. Un fascio non degenere ha esattamente 4 punti base (eventualmente coincidenti) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

4.12. Classificazione dei fasci di coniche

La tangenza a una retta in un suo punto costituisce due condizioni lineari indipendenti. Classificazione dei fasci non degeneri. Punti base di fasci degeneri. Classificazione dei fasci degeneri di coniche.