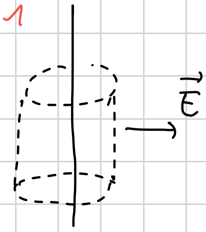
ESERCIZIO 1

1) 

Teorema di Gauss: $E\, 2\pi x\, h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\,\hat{x}$$

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_0} \Rightarrow \lambda = 2\pi\varepsilon_0 E_0 x_0 = 2\pi\; 8.9\times10^{-12}\, C^2 N^{-1} m^{-2}\; 240\,\frac{V}{m}\; 20\,cm$$
$$= 2.7\times10^{-9}\, C/m$$

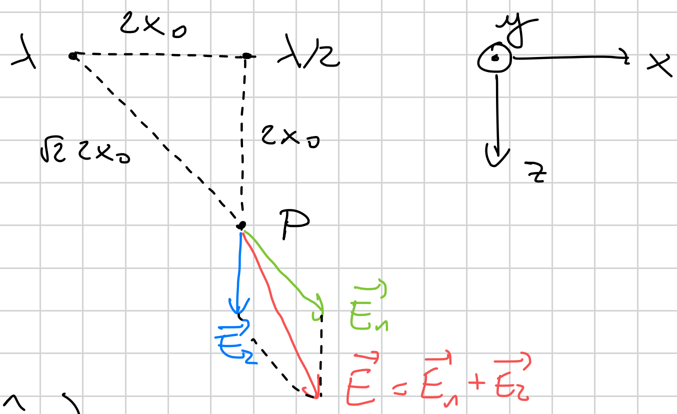
2) $$\mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_1+h} F\,dx = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_1+h}\frac{dx}{x} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{x_1+h}{x_1}$$
$$= \frac{10\times10^{-9}C\;\; 2.7\times10^{-9}\,C/m}{2\pi\; 8.85\times10^{-12}\, C^2 m^{-2} N^{-1}}\log\frac{2.5}{0.5} = 7.8\times10^{-7}\,J$$

3) Il primo filo genera un campo $\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_0}\,\hat{x}$

Il secondo filo $\vec{E}_2 = -\frac{\lambda/2}{2\pi\varepsilon_0 x_0}\,\hat{x}$

Il campo risultante è $\vec{E}_1+\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\,\hat{x} = 120\,\frac{V}{m}\,\hat{x}$

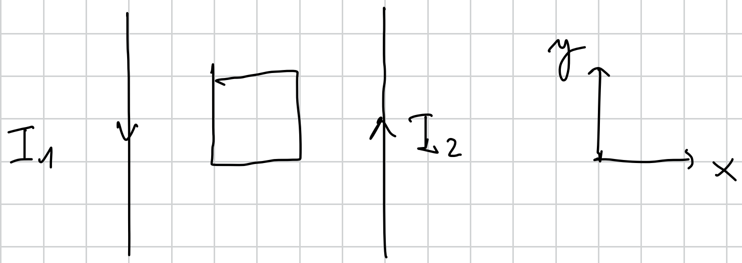
4) Visto dall'alto



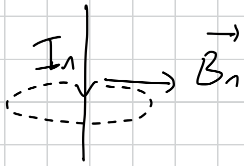
$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{2\sqrt{2}\,x_0}\;\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}}\\ \vec{E}_2 &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{2x_0}\;\hat{z}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{2x_0}\left(\frac{\hat{x}+\hat{z}}{2}+\hat{z}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{2x_0}\left(\frac{\hat{x}}{2}+\frac{3}{2}\hat{z}\right)$$

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{2x_0}\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right) = \frac{10}{4}\;\frac{1}{2}\;240\,\frac{V}{m} = 300\,\frac{V}{m}$$

ESERCIZIO 2



a) Legge di Ampere per calcolare il campo prodotto dal primo filo



$$2\pi r B_1 = \mu_0 I_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Prendo il vettore superficie nella spira uscente dal piano.

$$\phi = \int B_1 \, dS = \int_0^h \int_{\frac{d-h}{2}}^{\frac{d+h}{2}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \, dx \, dy =$$

$$= \frac{h \mu_0 I_1}{2\pi} \log \frac{d+h}{d-h}$$

b) Il coefficiente di mutua induzione è $M_1 = \frac{\phi_1}{I_1} = \frac{h\mu_0}{2\pi} \log \frac{d+h}{d-h}$

c) Il filo 2 genera un campo magnetico concorde al primo.
Il flusso ϕ_2 è pari a

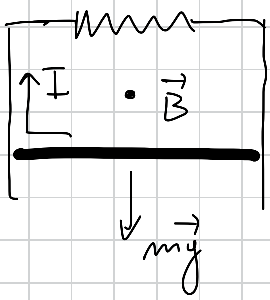
$$\phi_2 = -\frac{h \mu_0 I_2}{2\pi} \log \frac{d+h}{d-h} = \phi_1 \qquad \text{poiché } I_1 = -I_2$$

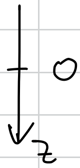
Di conseguenza $\quad M_{12} = 2 M_1 = 2 \frac{h \mu_0}{2\pi} \log \frac{d+h}{d-h}$

ESERCIZIO 3

a) $R = \frac{d}{S}\frac{1}{\sigma} = \frac{1\,cm}{\pi(1\,mm)^2}\;\frac{1}{3.3\times10^{2}\;\Omega^{-1}m^{-1}} = 9.6\;\Omega$

b)





La forza sulla sbarretta, quando si muove con velocità v, è

$$\vec F = M\vec g + I\,l\,B\,(-\hat z) = M\dot v\,\hat z$$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{lB}(g-\dot v)$$

La fem indotta nel circuito è $\mathcal{E} = +\,l\,v\,B$ dove il segno è coerente con il verso scelto per la corrente.

Per la legge delle maglie

$$\mathcal{E} = RI \Rightarrow I = \frac{lB}{R}v$$

Ho quindi

$$\frac{Mg}{lB} - \frac{M}{lB}\dot v = \frac{lB}{R}v$$

$$\dot v + \frac{l^2B^2}{MR}v = g$$

Soluzione omogenea: $v = \alpha e^{-\beta}$ $\quad \dot v = -\beta v$

$$\left(-\beta + \frac{l^2B^2}{MR}\right)v = 0 \Rightarrow \beta = \frac{l^2B^2}{MR} = 0.4\,s^{-1}$$

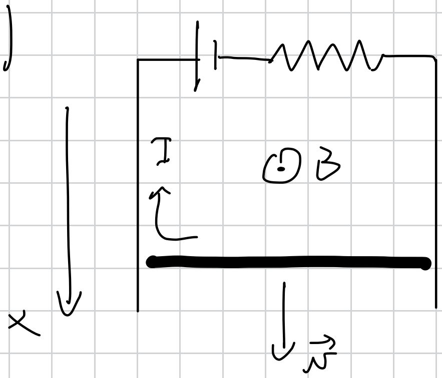
sol. particolare: $\dot v = 0 \Rightarrow v = \frac{MRg}{l^2B^2}$

$$\Rightarrow v = \frac{MRg}{l^2B^2} + \alpha\exp\left(-\frac{l^2B^2}{MR}t\right)$$

A $t=0$ voglio $v=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{MRg}{l^2B^2}$

Velocità limite: $v_\infty = \frac{MRg}{l^2B^2} \approx 23.6\;\frac{m}{s}$

c)



Applico la legge delle maglie

$$-V_0 + \mathcal{E} = RI$$

$$\Rightarrow I = \frac{l v B - V_0}{R}$$

Mentre la forza sulla sbarretta è

$$\vec{F} = - I l B \hat{x} = M \dot{v}$$

da cui

$$I = - \frac{M \dot{v}}{l B}$$

Quindi

$$-\frac{V_0}{R} + \frac{l B}{R} v = - \frac{M \dot{v}}{l B}$$

$$\dot{v} + \frac{l^2 B^2}{M R} v - \frac{V_0 l B}{M R} = 0$$

Come prima, l'eq omogenea ha soluzione $v = \alpha e^{-\beta t}$

con

$$\beta = \frac{l^2 B^2}{M R}$$

Ottengo una sol particolare dell'equazione inomogenea con $\dot{v} = 0$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{V_0}{l B}$$

Imponendo la condizione iniziale $v = 0$ a $t = 0$ ottengo

$$v = \frac{V_0}{l B} + \alpha e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{V_0}{l B}$$

Quindi $v = \frac{V_0}{l B} \left(1 - e^{-\beta t}\right)$

e la velocità limite è $\quad v_\infty = \frac{V_0}{l B} = 7.5 \ \frac{m}{s}$