Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 14/6/2024

1. (a) (6 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y} \ln\left(\frac{x^2-1}{1-y^2}\right).$$

   (b) (2 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(0,1)$, $(2,-\frac{1}{2})$.

   (c) (2 punti) L'insieme D è convesso? E' limitato? Si giustifichino le risposte.

2. (a) (3 punti) Si dimostri, usando la definizione di differenziabilità, che la funzione $g(x,y) = x^4 - y^4$ è differenziabile in $(0,0)$.

3. (a) i. (2 punti) Si determini il limite della successione di termini $a_n = \frac{\cos n}{e^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

   ii. (3 punti) Si dimostri che la successione di termini $b_n = \frac{n 2^n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

   (b) (2 punti) Si rappresenti la funzione $h(x) = \frac{x^4}{2-x^2}$ come serie di potenze.

4. (a) (2 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1,1)$ la curva definita dall'equazione

$$x^2 - y^2 - \ln(xy) = 0$$

   è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(1,1)$.

5. (a) (2 punti) Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ e sia $h : Q \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall (x,y) \in Q$,

$$h(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{se } y+x-1>0 \\ \pi & \text{se } y+x-1=0 \\ -2y & \text{se } y+x-1<0 \end{cases}$$

   Si calcoli l'integrale di Riemann $\iint_Q h$.

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x^3}{3}$$

   su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x,y) = 2x^3 + y^2 + xy.$$