Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2023-2024, secondo appello estivo

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)\frac{x^2+\sqrt{x^4-1}}{x^2+\sqrt{x^4-1}}=$$

$$=\frac{x^4-(x^4-1)}{x^2+\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

- si calcoli $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\int_x^{2x-\frac{\pi}{2}}\tan(t)dt$;

$$t=u+\frac{\pi}{2}$$

$$\int_x^{x+x-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt=\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{2x-\pi}\frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{\cos(t-\frac{\pi}{2})}dt$$

$$=\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{2(x-\frac{\pi}{2})}\frac{-\cos t}{\sin(t)}dt=-\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{2(x-\frac{\pi}{2})}\frac{1}{t}(1+o(1))dt=$$

$$-\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{2(x-\frac{\pi}{2})}\frac{1}{t}dt+\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{2(x-\frac{\pi}{2})}\frac{o(1)}{t}dt=-\lg 2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{o(1)}{t}\Big|_{t=c_x}\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^+]{}0$$

con $x-\frac{\pi}{2}\le c_x\le 2(x-\frac{\pi}{2})$

Il limite è $-\lg 2$

- si calcoli $f'(x)$ per $f(x):=\int_{x^2}^{\log|x^3-1|}\tanh(1+t)\,dt$;

$$f'(x)=\frac{1}{x^3-1}\,3x^2\,th\left(1+\lg|x^3-1|\right)-2x\,th\left(1+x^2\right)$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(2e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$

$2y^2 - y + 1 > 0 \ \forall\, y \in \mathbb{R}$ perché

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \lg(2y^2 - y + 1) = \lim_{y\to+\infty} \lg(y^2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \lg(2y^2 - y + 1) = \lg(1) = 0$$

- si calcoli $f'(x)$, si trovino gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - e^{x}}{2e^{2x} - e^{x} + 1} = \frac{4e^{x}\left(e^{x} - \frac{1}{4}\right)}{2e^{2x} - e^{x} + 1} = 0 \text{ per } x = \lg\frac{1}{4}$$

$f'(x) < 0$ per $x < \lg\left(\frac{1}{4}\right)$ e $f'(x) > 0$ per $x > \lg\frac{1}{4}$.

Notare che $f(x) = 0$ per $2e^{2x} - e^{x} = 0 \iff e^{x} - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \lg\frac{1}{2}$

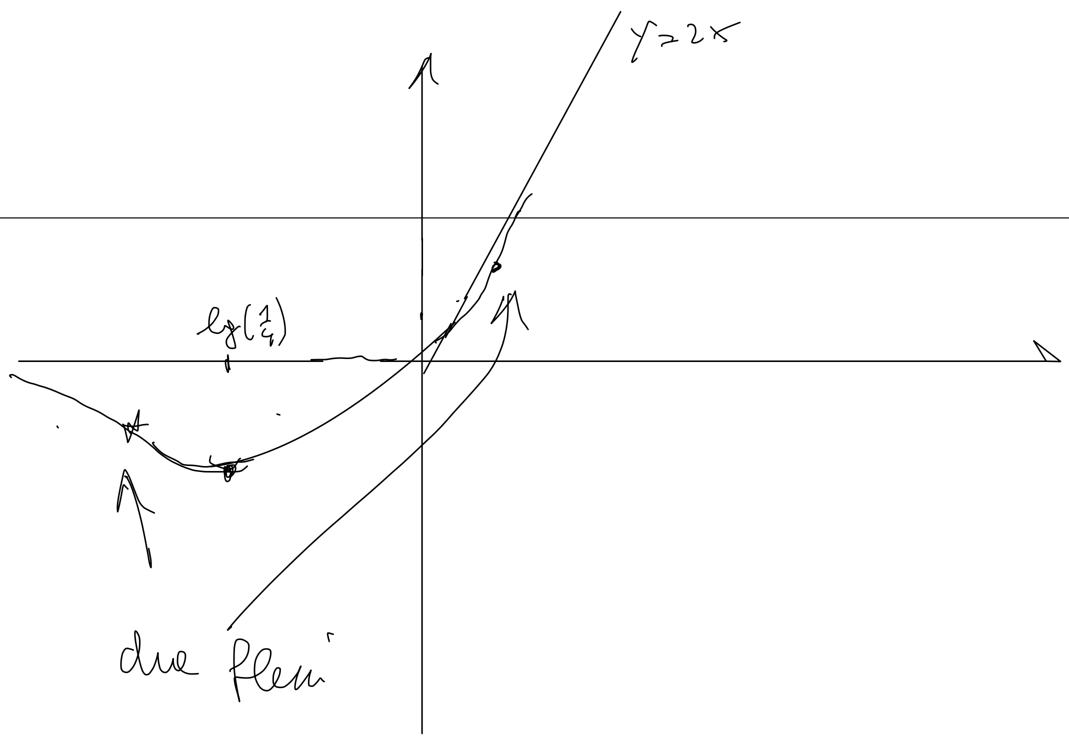
- si calcoli $f''(x)$ e si trovi dove e' concava e dove e' convessa;

$$f''(x) = \frac{(8e^{2x} - e^{x})(2e^{2x} - e^{x} + 1) - (4e^{2x} - e^{x})(4e^{2x} - e^{x})}{(2e^{2x} - e^{x} + 1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{16e^{4x}} - \cancel{8e^{3x}} - 2e^{3x} + \cancel{e^{2x}} + 8e^{2x} + e^{x} - \cancel{16e^{4x}} + 8\cancel{e^{3x}} - \cancel{e^{2x}}}{(\ \cdots\ )^2} = -\frac{e^{x}(2e^{2x} - 8e^{x} + 1)}{(\ \ )^2}$$

$y^2 - 8y + 1 = 0 \qquad y_{\pm} = 2 \pm \frac{\sqrt{16 - 2}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2} > 0 \qquad x = \lg\left(2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$

- si tracci il grafico .



COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}dx$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad \text{ecc}$$

- si calcoli le primitive $\int \sinh^4(x)dx$;

$$sh^4(x) = \left(\frac{1-ch(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}ch(2x) + \frac{ch^2(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{ch(2x)}{2} + \frac{1+ch(4x)}{4} \quad \text{ecc}$$

- si stabilisca se $e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ e' integrabile in $(0, +\infty)$; No perchè vicino a 0

$e^{\frac{1}{x^2}} - 1 >> \frac{1}{x^2}$ che non è integrabile in 0

- si stabilisca se $\tanh(x^3) - 1$ e' integrabile in $[0, +\infty)$.

$$th(x^3) - 1 = \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{e^{x^3}+e^{-x^3}} - 1 = \frac{-2e^{-x^3}}{e^{x^3}+e^{-x^3}} =$$

$= -2e^{-2x^3}(1+o(1))$ per $x \to +\infty$ e' integrabile vicino a $+\infty$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 6 (P6) di $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2+t^4} dt$.

$P_6 = P_5$ perché f è dispari. Il polinomio $q_4(t)$ di

$$\frac{1}{1+t^2+t^4} = 1 - t^2 - t^4 + (t^2+t^4)^2 + o(t^4) = 1 - t^2 + o(t^4) = q_4(t) + o(t^4)$$

$$f(x) = \int_0^x q_4(t)\,dt + \underbrace{\int_0^x o(t^4)\,dt}_{o(x^5)} = \underbrace{x - \frac{x^3}{3}}_{P_5(x)} + o(x^5)$$

$$P_6(x) = P_5(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = e^x$ con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

Polinomio caratteristico $r^2 - 2r + 1 = 0$ $r = 1$ soluzione doppia

cioè $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$ e $p''(1) = 2$

$$y_h = (A + Bx)e^x$$

$$y_p = C\,x^2 e^x$$

$$L[y_p] = C\,L[x^2 e^x] = C\Big(x^2 \underbrace{p(1)}_{0} e^x + 2x \underbrace{p'(1)}_{0} e^x + 2e^x\Big) =$$

$$= 2C\,e^x = e^x \qquad C = \frac{1}{2}$$

$y_g = y$ con

$$y = (A + Bx)e^x + \frac{x^2}{2}e^x. \text{ Infine}$$

$$y' = (A+B)e^x + Bxe^x + \left(\frac{x^2}{2}e^x\right)' \Longrightarrow$$

$$y(0) = A = 1$$

$$y'(0) = A + B = 1$$

$$\Longrightarrow y = e^x + \frac{x^2}{2}e^x$$