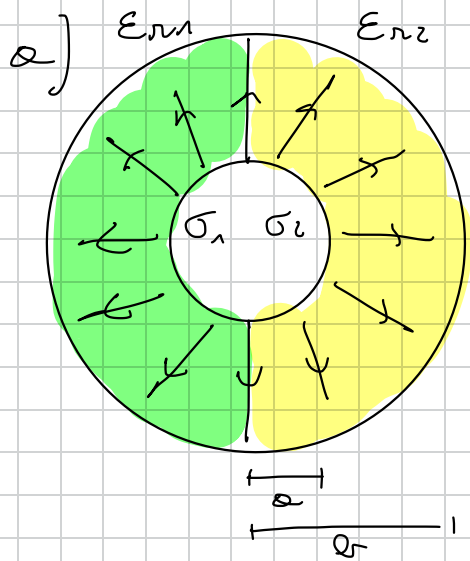


ESERCIZIO 1 - prima soluzione

Suppongo che la carica positiva si trovi sull'armatura interna



Le due armature del condensatore sono superfici equipotenziali, essendo di materiale conduttore.

Il campo elettrico è quindi radiale, con simmetria sferica.

La densità di carica sull'armatura vicino al dielettrico 1 è σ_1

Il campo vicino alla superficie è

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \sigma_1$$

La carica totale è

$$Q = \frac{4\pi a^2}{2} \sigma_1 + \frac{4\pi b^2}{2} \sigma_2$$

$$= 2\pi a^2 \sigma_1 \left(1 + \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \right)$$

Quindi

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{Q}{2\pi a^2} = \frac{2.4}{6.6} \frac{0.13 \times 10^{-6}}{2\pi (6.7)^2 \cdot 10^{-4}} \frac{C}{m^2}$$

$$= 1.7 \frac{\mu C}{m^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \sigma_1 = 2.9 \frac{\mu C}{m^2}$$

Sull'armatura esterna $\sigma_{1,ext} = \frac{a^2}{b^2} \sigma_{1,int}$ e $\sigma_{2,ext} = \frac{a^2}{b^2} \sigma_{2,int}$

b) Il campo elettrico è proporzionale a r^{-2} . Nel dielettrico 1, vicino alla superficie interna, $\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \hat{r}$, quindi

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \frac{Q^2}{r^2} \hat{r} = \\ &= \frac{2 \epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{2}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

e questa espressione è valida in entrambi i dielettrici.

Per $r = a$

$$|\vec{E}| = \frac{2}{2.4 + 4.2} \frac{0.13 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 6.7^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\approx 7.9 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

c) La differenza di potenziale tra le due armature è

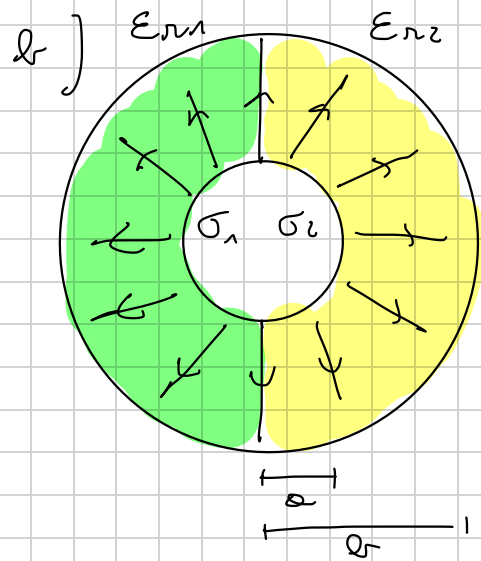
$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \approx 626 \text{ V}$$

La capacità è quindi

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} 4\pi \epsilon_0 \left(\frac{ab}{b - a} \right) \approx 0.21 \text{ nF}$$

ESERCIZIO 1 - seconda soluzione

Suppongo che la carica positiva si trovi sull'elettrodo interno



Le due elettrodi del condensatore sono superfici equipotenziali, essendo di materiale conduttore.

Il campo elettrico è quindi radiale, con simmetria sferica.

Possiamo pensare al sistema come due condensatori in parallelo di capacità

$$C_1 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1} \approx 7.6 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1} \approx 1.3 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$C = C_1 + C_2 = 0.21 \text{ nF}$$

c) La differenza di potenziale tra le elettrode vale

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{2}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

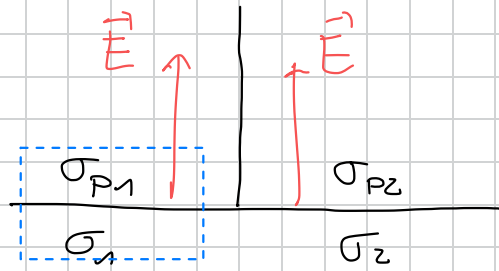
Poiché il campo è radiale e la simmetria sferica, vale che

$$E \propto r^{-2}$$

quindi

$$\vec{E} = \frac{2}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Vicino alla superficie dell'atmosfera interna le condizioni

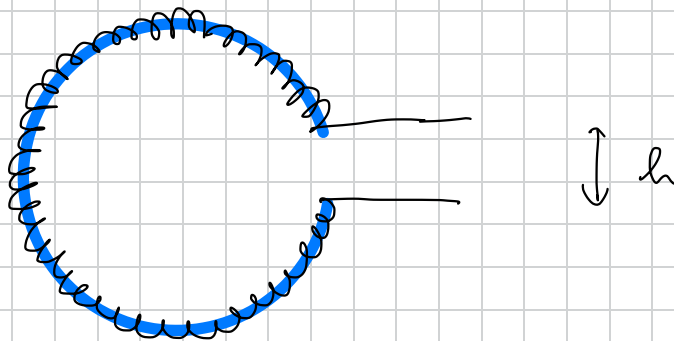


Applicando Gauss alla superficie in blu otteniamo

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{P1}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

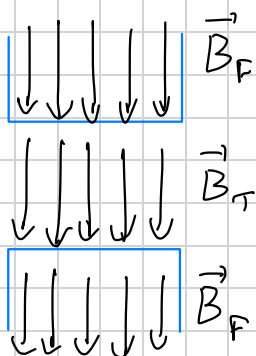
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E \approx 1.7 \mu C / m^2 \\ \sigma_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E \approx 2.9 \mu C / m^2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2



a) La forza magnetomotrice vale $E_{mm} = NI = 1.24 \text{ kA} \cdot \text{spira}$

b) Consideriamo l'interfaccia tra il ferro e il trafeño



La componente di $\vec{B}$ ortogonale alla superficie è continua. Essendo $\vec{B}$ uniforme, $\vec{B}$ è uguale nell'anella e nel trafeño.

Per il campo $\vec{H}$ vale

$$H_F = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

$$H_T = \frac{B}{\mu_0}$$

La circolazione di H è $\oint H \, dl = NI$

$$\text{e } \oint H \, dl = H_F L + H_T h = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} (L + \mu_r h)$$

da cui

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r}{L + \mu_r h} NI \approx 0.59 \text{ T}$$

c) L'energia del sistema vale

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dV + \frac{1}{2} \int_T \vec{H} \cdot \vec{B} \, dV$$

$$= \frac{1}{2} L S \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} + \frac{1}{2} h S \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{S}{2 \mu_0 \mu_r} (L + h \mu_r) \left(\frac{\mu_0 \mu_r}{L + h \mu_r} NI \right)^2$$

$$= \frac{S \mu_0 \mu_r N^2 I^2}{2} \frac{1}{L + \mu_r h}$$

la forza vale quindi

$$F = - \frac{dU_m}{dh} = - \frac{1}{2} N^2 I^2 S \mu_r \mu_0 \frac{d}{dh} \frac{1}{L + \mu_r h}$$

$$= \frac{N^2 I^2 S \mu_r \mu_0}{2 (L + \mu_r h)^2} \approx 18 \text{ N}$$

ESERCIZIO 3

a) Per un circuito RLC in serie

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

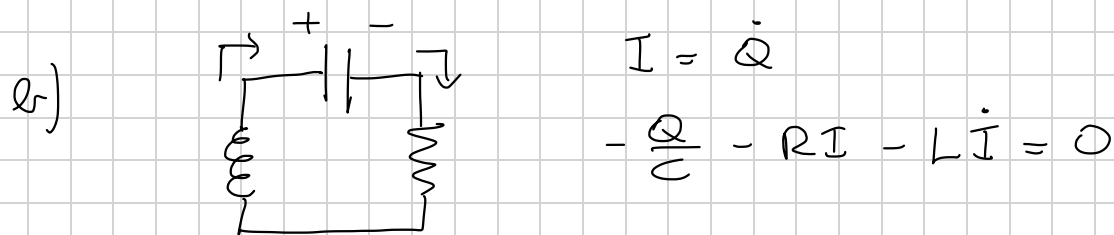
$$\text{e } \langle P \rangle = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$$

In risonanza $\omega = \omega_0$: $\langle P \rangle = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$

Quindi $R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{\langle P \rangle} = \frac{(200 \text{ V})^2}{50 \text{ W}} = 0.8 \text{ k}\Omega$

$$\omega_0 Q = \frac{1}{RC} \Rightarrow C = \frac{1}{R Q \omega_0} = 2.3 \mu\text{F}$$

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \Rightarrow L = R \frac{Q}{\omega_0} = 2.1 \text{ H}$$



L'equazione che governa il circuito è quindi

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0$$

definisco $\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma = \frac{R}{L} \approx 381 \text{ s}^{-1} & \text{frequenza di smorzamento} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \approx 455 \text{ s}^{-1} & \text{freq di risonanza.} \end{array} \right.$

Cerchiamo una soluzione della forma $Q = A e^{\alpha t}$

$$\alpha^2 + \Gamma \alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Il discriminante dell'equazione è

$$\Delta = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = -1.7 \times 10^5 \text{ s}^{-2} < 0$$

il circuito è oscillante smorzato

Chiuso $\omega = \sqrt{-\Delta} \approx 413 \text{ s}^{-1}$

$$Q = A e^{-\frac{R}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$Q(0) = A \cos \phi = Q_0 \Rightarrow$$

$$I(0) = -\frac{R}{2} A \cos \phi - A \omega \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{2} Q_0 - Q_0 \omega \tan \phi = 0 \Rightarrow \tan \phi = -\frac{R/2}{\omega}$$

$$A = \frac{Q_0}{\cos \phi} = Q_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi} = Q_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R/2}{\omega}\right)^2}$$

c) Il circuito è oscillatorio smorzato per $\Delta < 0$, ~~smorzato~~
per $\Delta > 0$.

$$\Delta < 0: \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1.9 \text{ k}\Omega$$