**Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 15.07.24**

*Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2023/2024*

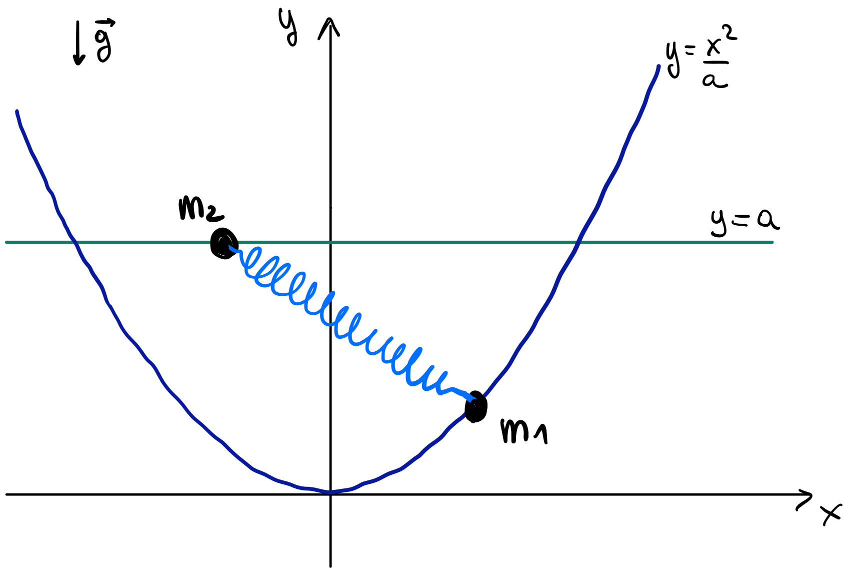
## Esercizio 1

1. Cos'è un sistema Lagrangiano? [1pt]
2. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Lagrangiano. Fare un esempio. [2pt]
3. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther in meccanica Lagrangiana. [4pt]
4. *Usando il teorema appena enunciato*, dimostrare che la presenza di un coordinata ciclica impica che il momento coniugato è una costante del moto. [2pt]
5. Si scriva la Lagrangiana di un punto materiale che si muove nello spazio tridimensionale e soggetto a una forza centrale con potenziale $V = V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Questo sistema Lagrangiano può essere descritto anche nel formalismo Hamiltoniano: si scriva l'Hamiltoniana in un set di coordinate canoniche. [1pt]
6. Si dimostri usando il formalismo Hamiltoniano che il momento angolare è una costante del moto. [2pt]
7. Si dimostri che il sistema ammette tre costanti del moto in involuzione tra di loro. [1,5pt]
8. Perch'é è importante che tale sistema abbia la proprietà dimostrata al punto 7? [1pt]
9. Dimostrare che le rotazioni sul piano per un punto materiale vincolato a tale piano sono delle trasformazioni canoniche. [1,5pt]

## Esercizio 2

Nel sistema in figura, disposto in un piano verticale, un punto materiale di massa $m_1$ è vincolato a una parabola di equazione $y^2 = \frac{x^2}{a}$, mentre un punto materiale di massa $m_2$ è vincolato a una retta orizzontale di equazione $y = a$. I due punti materiali sono legati da una molla di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'ascissa $z$ del punto vincolato alla retta e l'ascissa $s$ del punto vincolato alla parabola. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].
2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata $s$ [2pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [4pt].
4. Si ponga $m_1 = m_2 = m$ ed $\frac{mg}{ka} = \frac{7}{4}$. Calcolare le frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile [1,5pt].
5. Si ponga $m_1 = m_2 = m$ ed $\frac{mg}{ka} = \frac{1}{4}$. Calcolare le frequenza delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili [1,5pt].




6. Si vincoli il punto di massa $m_2$ a stare fisso in $(x, y) = (0, a)$. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema a un grado di libertà attorno ad $s = 0$ [1pt].

7. Si consideri il sistema unidimensionale del punto 6. Si faccia ruotare la guida parabolica attorno all'asse $y$ con velocità angolare costante $\omega$. Si scriva la nuova Lagrangiana unidimensionale. Si determini $\omega$ in modo che il punto di massa $m_1$ sia fermo in equilibrio sulla guida parabolica a distanza $a$ dall'asse $y$ [2pt].

## Esercizio 3

Si cosideri una particella quantistica vincolata su una circonferenza di raggio $R$ e parametrizzata da $\varphi \in [0, 2\pi[$. La sua dinamica è determinata dall'Hamiltoniana

$$H_\theta = \frac{\left(p_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2}\,.$$

1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, trovando autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana $\hat{H}_\theta$ [2,5pt].

2. Si dica se le autofunzioni di $\hat{H}_\theta$ descrivono stati fisici del problema e perché [0,5pt].

3. Dato lo stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos\varphi$ al tempo $t = 0$, scrivere il suo evoluto $\psi(\varphi, t)$ al tempo $t \neq 0$ [1pt].