NUMERI COMPLESSI

A partire da $\mathbb{N}$ abbiamo progressivamente ampliato l'insieme dei numeri:
- da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ per poter fare le "sottrazioni"
- da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ per poter fare le "divisioni"
- da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ per poter fare le radici di un numero positivo

Ci chiediamo ora se sia possibile estendere $\mathbb{R}$ in modo da poter risolvere l'equazione $x^2 = -1$. La costruzione che descriviamo ora ci porta a definire i "numeri complessi" che indichiamo con $\mathbb{C}$.

Consideriamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. i cui elementi sono coppie di numeri reali (x, y)

In $\mathbb{R}^2$ definiamo una somma

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \overset{def}{:=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Si verifica facilmente che tale somma è

1) commutativa; 2) associativa;
3) la coppia $(0,0)$ è elemento neutro;
4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) + (-x,-y) = (0,0)$.

②

Definiamo inoltre una moltiplicazione.

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \overset{def.}{:=} (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Si verifica che tale moltiplicazione è

1) commutativa, 2) associativa;

3) la coppia $(1,0)$ è t.c. $(x,y)\times(1,0)=(x,y)$

4) $\forall\ (x,y)\neq 0,\quad (x,y)\times\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$

Si verifica anche che vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma.

Si osservi che $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$

$(x_1, 0) \times (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$

Quindi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ si può identificare con $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq (\mathbb{R}^2, +, \times)$

ovvero $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ è una estensione algebrica di $\mathbb{R}$. $(0,0) \sim 0$; $(1,0) \sim 1$

Osserviamo che $(0,1)\times(0,1) = (-1, 0)$

cioè $(0,1)$ risolve $x^2 = -1$.

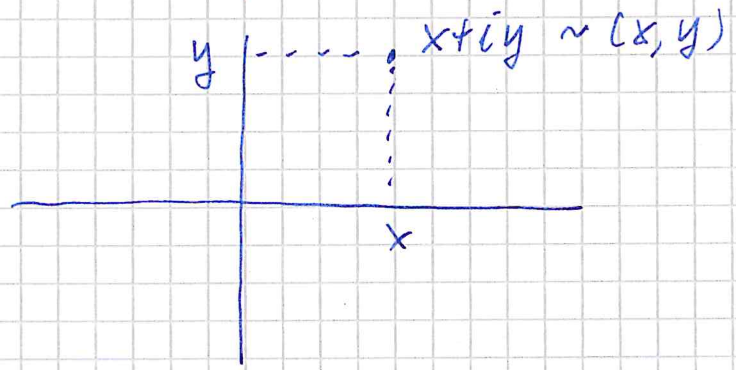
Indicando $(1,0)$ con $\mathbb{1}$ e $(0,1)$ con i

si ha che $(x,y) = (x,0)\times \mathbb{1} + (y,0)\times i$

e identificando la coppia $(x,0)$ con il numero reale x, la coppia $(y,0)$ con il numero reale y, possiamo scrivere

$$(x,y) = x + iy$$

che è la forma classica in cui si scrivono i numeri complessi.



Di solito il numero complesso generico si indica con $z = x+iy$

x si dice parte reale di z e si scrive $x = \mathrm{Re}\, z$,
y si dice parte immaginaria di z e si scrive $y = \mathrm{Im}\, z$.

Si ha dunque $i^2 = -1$, e le operazioni tra numeri complessi si svolgono formalmente come le operazioni tra numeri reali, con la proprietà che $i^2 = -1$.

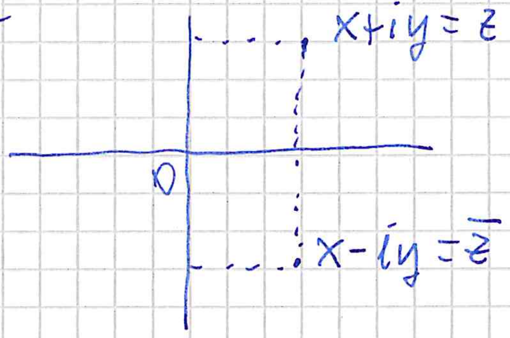
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + i\,x_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)$$

OSSERVAZIONE

in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ non c'è un ordinamento

Notazioni

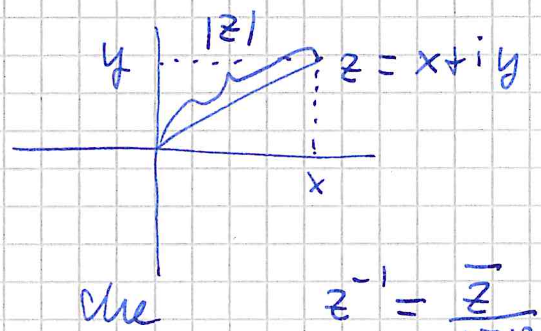
Se $z = x+iy$ si definisce il suo coniugato
$\bar{z} := x - iy$



Si osservi che $\quad \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \quad \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

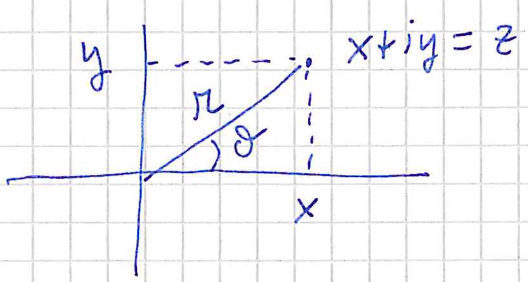
Si definisce il modulo di z

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$



* Si osservi che $\quad z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\ ;\ \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\ ;\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$

Numeri complessi in coordinate polari



se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi[\,, \quad r > 0$$

$$\begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \vartheta = \arctan\frac{y}{x} \quad \text{se } y>0 \wedge x>0 \quad \text{etc} \end{cases}$$

ϑ si dice argomento di z, $\vartheta = \mathrm{Arg}\, z$.

Introduciamo la seguente notazione:

per $\vartheta \in \mathbb{R}$, $e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

Dalle formule di addizione si ha

$$\begin{aligned} e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} &= \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ &= \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 \\ &\quad + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2) \\ &= (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \\ &= e^{i\vartheta_1}e^{i\vartheta_2} \end{aligned}$$

⑥

Supponiamo ora di voler risolvere

$z^n = w$ con w assegnato, $w \neq 0$.

Si passa alle coordinate polari.

$w = \rho e^{i\vartheta}$ $\qquad z = r e^{i\varphi}$

$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\vartheta}$

$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ n\varphi - \vartheta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

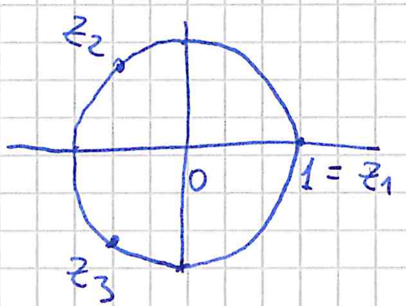
$$\iff \begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \varphi = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Quindi ci sono esattamente n soluzioni di $z^n = w$, precisamente

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

dove $w = \rho e^{i\vartheta}$

In particolare se $w = 1$, ho n radici dell' unità; $z^3 = 1$



sono i vertici di un poligono regolare.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = p(z)$ un polinomio a coefficienti complessi, con $n \geq 1$. Allora $\exists \; z^* \in \mathbb{C}$ t.c. $p(z^*) = 0$.

Conseguenza: Dal teorema di Ruffini segue che $p(z)$ si può fattorizzare in fattori di grado 1, ciascuno con la sua molteplicità

$$p(z) = (z - z_1)^{p_1} \dots (z - z_k)^{p_k}$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$$

Se i coefficienti di $p(z)$ sono tutti reali, allora se $P(z_1) = 0$, anche $p(\bar{z}_1) = 0$. Allora si ha

$$p(z) = (z - a_1)^{p_1} \dots (z - a_k)^{p_k} (z - \lambda_1)^{q_1} (z - \bar{\lambda}_1)^{q_1} \dots (z - \lambda_h)^{q_h} (z - \bar{\lambda}_h)^{q_h}$$

$$p_1 + \dots + p_k + 2q_1 + \dots + 2q_h = n$$

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$,

$\operatorname{Im} \lambda_1, \dots, \operatorname{Im} \lambda_h \neq 0$

8

osserviamo che $(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = x^2 - \bar{\lambda}x - \lambda x + \lambda\bar{\lambda}$

$$= \underbrace{x^2 - (2\operatorname{Re}\lambda)x + |\lambda|^2}$$

polinomio a coeff. reali, irriducibile.

allora

$$p(z) = (z-a_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (z-a_k)^{p_k} (z^2 + b_1 z + c_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (z^2 + b_h z + c_h)^{q_h}$$

con $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_h, c_1, \ldots, c_h \in \mathbb{R}$

e $b_j^2 - 4c_j < 0 \quad \forall j$