<u>Oss.</u> L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio. Quindi le rette passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

In generale, in $\mathbb{R}^n$, se considero k equazioni

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots\dots\dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

L'insieme $V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{soddisfano } (S)\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

(È l'intersezione di k "iperpiani").

C'è un altro modo per costruire sottospazi.

Dati $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

Si costruisce $\operatorname{span}\langle v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \rangle :=$

$$= \{ \lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_k v^{(k)} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \}$$

Si chiama <u>sottospazio generato da</u> <u>$v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$</u>.

Se $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio e se $V = \operatorname{span}\langle v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \rangle$ allora si dice che $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ sono un "sistema di generatori di V".

Ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ ammette un insieme finito di generatori.
È importante che non ci siano generatori superflui.

Nasce così il concetto di famiglia linearmente indipendente.

DEFINIZIONE

Siano $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. Si dicono <u>linearmente indipendenti</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, se $\lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_k v^{(k)} = 0$

allora necessariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

(l'unica combinazione lineare nulla è quella i cui coefficienti sono tutti nulli

Si dicono <u>linearmente dipendenti</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli t.c.

$$\lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_k v^{(k)} = 0.$$

Se $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ sono linearmente dipendenti, allora uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri.

Infatti ho $\lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_k v^{(k)} = 0$ coi λ_i non tutti nulli. Se ad esempio $\lambda_1 \neq 0$, allora

$$v^{(1)} = \sum_{j=2}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_1} v^{(j)}$$

conseguenza: $\mathrm{span}\langle v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \rangle =$

$$= \mathrm{span}\langle v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \rangle$$

Quindi ho eliminato un vettore superfluo.

Iterando questa procedura un numero finito di volte, partendo da una famiglia di generatori $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ di un sottospazio V posso procurarmi una sottofamiglia

$v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_q)}$ $\quad q \leq k$,

t.c. a) $v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_q)}$ sono indipendenti

b) $\mathrm{span}\langle v^{(i_1)}, \dots, v^{i_q} \rangle = V$.

36

Una tale famiglia di generatori si chiama <u>base</u> di V.

Due basi di V hanno sempre lo stesso numero di elementi, detto <u>dimensione</u>.

Se V ha $v^{(1)}, \dots, v^{(q)}$ come base, allora ogni elemento di V si può esprimere in un unico modo come combinazione lineare di $v^{(1)}, \dots, v^{(q)}$.

<u>ESEMPIO</u>

$v^{(1)} = (1, 0, 1)$, $v^{(2)} = (0, 1, 0)$, $v^{(3)} = (1, 1, 1)$

sono linearmente dipendenti perché

$$v^{(1)} + v^{(2)} - v^{(3)} = 0.$$

In particolare $v^{(3)} = v^{(1)} + v^{(2)}$,

quindi $V = \text{span}\langle v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \rangle = \text{span}\langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle$

Verifichiamo se $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ sono indipendenti:

$$\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 \ \lambda_2 0 = 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 \ \lambda_2 \cdot 1 = 0 \\ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 0 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Quindi $v^{(1)}, v^{(2)}$ è una base di V.

Def.

In $\mathbb{R}^n$, posto $e_j := (0,0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1},0,\dots,0)$,

si ha che $e_1, \dots, e_n$ è una base, detta base canonica.

Basi ortonormali

Un insieme di vettori $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ si dice famiglia ortonormale $\iff$

a) $\|u^{(i)}\| = 1 \quad \forall i$

b) $u^{(i)} \cdot u^{(j)} = 0$ se $i \neq j$

Proposizione

Se $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ è una famiglia ortonormale, allora è linearmente indipendente.

Dim.

Sia $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u^{(i)} = 0$. Allora $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^{(i)}\right) \cdot u^{(k)} = 0$ $\forall k$. Segue che

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^{(i)} \cdot u^{(k)} = 0 \\ = \lambda_k \end{cases} \quad \forall k.$$

$\blacksquare$

(38)

Def. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio. Se $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ è una base di V ed è una famiglia ortonormale, allora si dice che è una base ortonormale di V.

Oss. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale.

Se $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ è una base ortonormale di V, allora $\forall\ u \in V$ si ha

$$u = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(u \cdot u^{(i)})}_{\text{coefficienti di Fourier}} u^{(i)}$$

Se $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio, a partire da una sua base $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ si può costruire una base ortonormale $w^{(1)}, \dots, w^{(k)}$ di V in modo che

$$\text{span} < w^{(1)} > = \text{span} < u^{(1)} >$$

$$\text{span} < w^{(1)}, w^{(2)} > = \text{span} < u^{(1)}, u^{(2)} >$$

$$\vdots$$

$$\text{span} < w^{(1)}, \dots, w^{(k)} > = \text{span} < u^{(1)}, \dots, u^{(k)} >$$

utilizzando il metodo di Gram-Schmidt

che funziona così:

$$u^{(1)} \longmapsto v^{(1)} := u^{(1)} \longrightarrow w^{(1)} := \frac{v^{(1)}}{\|v^{(1)}\|}$$

$$u^{(2)} \longmapsto \underbrace{v^{(2)} = u^{(2)} - (u^{(2)} \cdot w^{(1)}) w^{(1)}}_{\text{tolgo a } u^{(2)} \text{ la sua proiezione ortogonale su span} \langle w^{(1)} \rangle} \longmapsto \underbrace{w^{(2)} := \frac{v^{(2)}}{\|v^{(2)}\|}}_{\text{normalizzo}}$$

$$\vdots$$

$$u^{(k)} \longmapsto \underbrace{v^{(k)} = u^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (u^{(k)} \cdot w^{(j)}) w^{j}}_{\text{tolgo a } u^{(k)} \text{ la sua proiezione ortogonale su span} \langle w^{(1)}, \dots, w^{(k-1)} \rangle} \longmapsto \underbrace{w^{(k)} := \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|}}_{\text{normalizzo}}$$

<u>Conseguenza</u>:

Dato un sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione k posso trovare una base ortonormale $u^{(1)}, \dots u^{(k)}, u^{(k+1)}, \dots, u^{(n)}$ di $\mathbb{R}^n$ t.c.

$V = \text{span} \langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$

Così $V = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot u^{(j)} = 0, \ j = k+1, \dots, n \}$

Scrivendo in componenti, si ha che

(40)

V è definito dal sistema di $n-k$ equazioni

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i^{(j)} = 0 \quad j = k+1, \dots, n \right.$$