terzo vettore, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, è generato linearmente da T. Il prossimo teorema mostra che, se si aggiunge a $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ ogni vettore generato linearmente da T, si ottiene un insieme dipendente.

TEOREMA 1.8. *Sia $S=\{A_1,\ldots,A_k\}$ un insieme linearmente indipendente di k vettori in V_n, e sia $L(S)$ lo spazio lineare generato. Allora, ogni insieme di $k+1$ vettori in $L(S)$ è linearmente dipendente.*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene per induzione sul numero k di vettori di S. Dapprima supponiamo $k=1$. Allora, per ipotesi, S è costituito da un vettore unico, diciamo A_1, dove $A_1\neq O$ poiché S è indipendente. Ora prendiamo due qualsiasi vettori distinti B_1 e B_2 in $L(S)$. Poiché ogni vettore è un multiplo scalare di A_1, possiamo scrivere $B_1=c_1A_1$ e $B_2=c_2A_1$, dove c_1 e c_2 non sono entrambi zero. Moltiplicando B_1 per c_2 e B_2 per c_1 e sottraendo, troveremo che

$$c_2B_1-c_1B_2=O\ .$$

Questa è una rappresentazione non banale di O, cosicché B_1 e B_2 sono dipendenti. Ciò dimostra il teorema nel caso $k=1$.

Adesso supponiamo che il teorema sia vero per $k-1$ e dimostriamo che è vero anche per k.

Prendiamo un qualsiasi insieme di $k+1$ vettori in $L(S)$, diciamo $T=\{B_1,B_2,\ldots,B_{k+1}\}$. Vogliamo dimostrare che T è linearmente dipendente. Poiché ogni B_i è in $L(S)$, possiamo scrivere

$$B_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}A_j \tag{1.11}$$

per ogni $i=1,2,\ldots,k+1$. Prendiamo in considerazione tutti gli scalari a_{i1} che moltiplicano A_1 e dividiamo la dimostrazione in due casi a seconda che questi scalari siano oppure non siano tutti nulli.

Caso 1. $a_{i1}=0$ *per ogni* $i=1,2,\ldots,k+1$. In questo caso nella somma nella [1.11] non compare A_1, e così ogni B_i in T è generato linearmente dall'insieme $S'=\{A_2,\ldots,A_k\}$. Ma S' è linearmente indipendente ed è costituito da $k-1$ vettori. Per l'ipotesi induttiva, il teorema è vero per $k-1$ e allora l'insieme T è dipendente. Ciò dimostra il teorema nel caso 1.

Caso 2. *Non tutti gli scalari a_{i1} sono zero.* Non è restrittivo supporre che $a_{11}\neq 0$. Prendendo $i=1$ nell'equazione [1.11] e moltiplicando entrambi i membri per c_i, con $c_i=a_{i1}/a_{11}$, si ottiene

$$c_iB_1=a_{i1}A_1+\sum_{j=2}^{k}c_ia_{1j}A_j\ .$$

Sottraendo da questa l'equazione [1.11] si ha

$$c_i B_1 - B_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) A_j \,,$$

per $i = 2, \ldots, k+1$. Questa uguaglianza esprime ciascuno dei k vettori $c_i B_1 - B_i$ come una combinazione lineare dei $k-1$ vettori linearmente indipendenti $A_2, \ldots, A_k$. Per l'ipotesi induttiva, i k vettori $c_i B_1 - B_i$ devono essere dipendenti. Dunque, per qualche scelta di scalari $t_2, \ldots, t_{k+1}$, non tutti zero, avremo

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i B_1 - B_i) = O \,,$$

cioè

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i\right) B_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i B_i = O \,.$$

Ma questa è una combinazione lineare non banale di $B_1, \ldots, B_{k+1}$ che rappresenta il vettore zero, pertanto i vettori $B_1, \ldots, B_{k+1}$ devono essere dipendenti. Ciò completa la dimostrazione.

Dimostriamo ora che il concetto di ortogonalità è legato strettamente all'indipendenza lineare.

DEFINIZIONE. *Un insieme* $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *di vettori in* V_n *è detto insieme ortogonale se* $A_i \cdot A_j = 0$ *ogni volta che* $i \neq j$. *In altre parole, due vettori distinti qualsiasi in un insieme ortogonale sono perpendicolari.*

TEOREMA 1.9. *Ogni insieme ortogonale* $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *di vettori non nulli in* V_n *è linearmente indipendente. Inoltre, se* S *genera un vettore* X, *diciamo*

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i \,, \qquad [1.12]$$

allora i moltiplicatori scalari $c_1, \ldots, c_k$ *sono dati dalle formule*

$$c_j = \frac{X \cdot A_j}{A_j \cdot A_j} \qquad per\ j = 1, 2, \ldots, k \,. \qquad [1.13]$$

Dimostrazione. Dapprima dimostriamo che S è linearmente indipendente. Supponiamo che $\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O$. Moltiplicando scalarmente i due membri per A_1 e tenendo presente che $A_1 \cdot A_i = 0$ per ogni $i \neq 1$, si vede che $c_1(A_1 \cdot A_1) = 0$. Ma $(A_1 \cdot A_1) \neq 0$ poiché $A_1 \neq O$; dunque $c_1 = 0$. Ripetendo ciò con A_j al posto di A_1, otterremo che ogni $c_j = 0$. Perciò S genera O univocamente, e così S è linearmente indipendente.

Ora supponiamo che S generi X come nella [1.12]. Prendendo il prodotto