Dimostrazione che $\det(AB) = \det A \det B$ in $\mathcal{M}^{3\times 3}$

(60 bis)

Sia $A \in \mathcal{M}^{3\times 3}$.

Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

Vogliamo calcolare $\det(Au, Av, Aw)$

Si ha:

$$\det(Au, Av, Aw) = \det\left(A\sum_i u_i e_i, A\sum_j v_j e_j, A\sum_k w_k e_k\right)$$

$$= \sum_{ijk} u_i v_j w_k \det(Ae_i, Ae_j, Ae_k)$$

$$= \sum_{ijk} u_i v_j w_k (\det A)\, \varepsilon_{ijk}$$

dove $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ 1 & \text{se } ijk = \begin{cases} 123 \\ 231 \\ 312 \end{cases} \\ -1 & \text{se } ijk = \begin{cases} 213 \\ 132 \\ 321 \end{cases} \end{cases}$

$$= \det A \det(u, v, w)$$

Segue che

$$\det(ABu, ABv, ABw) = \det A \det B \det(u, v, w)$$

In particolare $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.