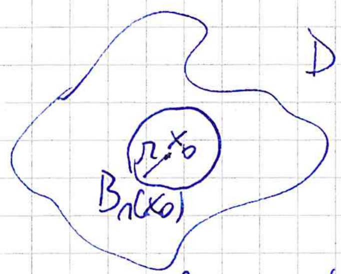
TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definiamo:

$$B_r(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r \}$$

la palla aperta centrata in x_0 di raggio r.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che $x_0 \in D$ è un <u>punto interno</u> di $D \iff \exists\, r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq D$



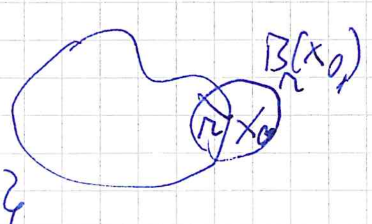
Indichiamo con $\mathring{D}$ l'insieme dei punti interni di D.

Diremo che D è aperto $\iff D = \mathring{D}$, ovvero $\iff \forall\, x_0 \in D \ \exists\, r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq D$.

Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Diremo che x_0 è un <u>punto di frontiera</u> di $D \iff \forall\, r > 0 \quad B(x_0) \cap D \neq \emptyset$
$\wedge \quad B(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq 0$

$\partial D := \{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x_0$ punto di frontiera di $D \}$



Diremo che D è chiuso $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus D$ è aperto.

È facile verificare che

D è aperto $\Longleftrightarrow$ $\partial D \cap D = \emptyset$

D è chiuso $\Longleftrightarrow$ $\partial D \cap D = \partial D$.

ESEMPIO

$\partial B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r \}$.

Def.

Dato $D \subseteq \mathbb{R}^n$, la "chiusura" di D è

$\overline{D} :=$ il più piccolo chiuso che contiene D.

Si vede che

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

Esempio

$\overline{B_r(x_0)} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r \}$.

Definizione

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato $\Longleftrightarrow$ $\exists\ R > 0$ t.c. $D \subseteq B_R(0)$.

Def.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di accumulazione di $D \iff \forall r > 0 \quad \exists\, x \in D$ t.c. $0 < \|x - x_0\| < r$.

Def.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $x_0 \in D$ si dice punto isolato di D $\iff \exists\, r > 0$ t.c. $D \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$.

Def.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^n$.

Si dice che $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{R}^n \iff$

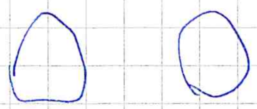
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Oss.

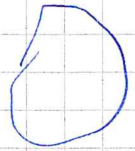
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso $\iff \forall\, (x_n)_n$ successione in D, se $\exists \lim_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{R}^n$, allora si ha che $x \in D$.

Def.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>aperto</u>. Si dice che D è connesso $\iff$ non può essere espresso come unione di due aperti disgiunti e non vuoti D_1 e D_2.



D_1 $\quad$ D_2 $\qquad D = D_1 \cup D_2$ non connesso



D connesso.

Def.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : D \to \mathbb{R}^m$

sia $x_0 \in D$.

Si dice che f è continua in x_0

$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.c.

$$(\forall x \in D)\left(\|x - x_0\| < \delta \to \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \right).$$

È facile verificare che

PROPOSIZIONE (analoga a funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$)

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e sia $x_0 \in D$.

Allora f è continua in x_0 $\Longleftrightarrow$

($\forall$ successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D)

$$\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \to \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \right)$$ ///

Def.

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. K si dice compatto $\Leftrightarrow$ ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di K ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$\exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x \in K.$$

Si ha che K è compatto $\Leftrightarrow$ K è chiuso e limitato.

Vale il teorema di WEIERSTRASS

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato e sia $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
Allora f ammette massimo e minimo su K.

Definizione

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
e sia x_0 punto di accumulazione di D.
Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0) \text{ t.c. } (\forall x\in D)(0<\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}<\delta \rightarrow \|f(x)-l\|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon.$$

(76)

Si ha che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall$ successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x_0\}$

se $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ allora

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

OSSERVAZIONE

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, \dots, l_m)$

$$\iff$$

$$\lim_{x \to x_0} f_j(x) = l_j \quad \forall j = 1, \dots, m.$$