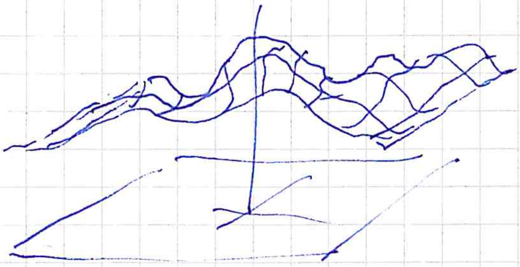
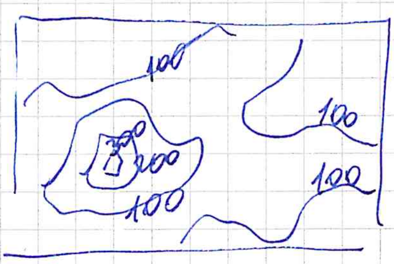
(87)

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$
Se ad esempio $n=2$, il grafico di f, $G_f \subseteq \mathbb{R}^3$, può essere pensato come il plastico di una catena montuosa



Un modo per rappresentare i grafici di funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è tramite linee di livello, come nelle carte geografiche



Per studiare il grafico di una funzione di più variabili si introduce il concetto di derivata parziale.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (aperto) e sia $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$

"congeliamo" $x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0$
e consideriamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0+h, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

se tale limite esiste, si dice che
f è derivabile in x^0 rispetto alla variabile
x_i, e si scrive

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0+h, \dots x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0+he_i) - f(x^0)}{h}$$

Esempio

$$f(x,y) = \cos(xy) + e^x(2+3xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy) + e^x(2+3xy) + e^x \cdot 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy) + e^x \cdot 3x$$

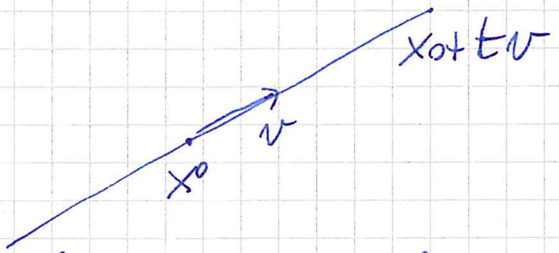
In generale, se $v \in \mathbb{R}^n$ diremo che
f è derivabile in x_0 nella direzione v
$\iff$

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv) - f(x^0)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$$

Ciò equivale a considerare

$$g(t) := f(x^0 + tv) \quad , \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e chiedere che g sia derivabile in $t = 0$.



Considero f ristretta alla retta $x^0 + tv$ e la tratto come funzione di una sola variabile t.

Supponiamo ora che in un intorno di $x^0 = (x^0_1, \dots, x^0_n)$ esistano tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ e siano continue. Allora si ha:

TEOREMA

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \ \exists \ \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, v_i$$

Dimostrazione

Consideriamo il caso $n = 2$.

Sia $v = (v_1, v_2)$

Allora

$$\frac{f(x^0+tv_1, y^0+tv_2)-f(x^0, y)}{t} =$$

$$= \frac{f(x^0+tv_1, y^0+tv_2)-f(x^0, y^0+tv_2)}{t}$$

$$+ \frac{f(x^0, y^0+tv_2)-f(x^0,y^0)}{t}$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial x}(x^0+t_1^* v_1, y^0+tv_2)\, tv_1$$

$$+ \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0+t_2^* v_2) \cdot tv_2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x^0+t_1^* v_1, y^0+tv_2)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^0+t_2^* v_2)\, v_2$$

dove $0 < t_1^* < t$, $0 < t_2^* < t$

Quindi

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, v_2$$

∎

Definiamo quindi, se esistono tutte le derivate parziali in x^0, il <u>gradiente</u> di f in x^0.

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)$$

Abbiamo appena visto che se le derivate

parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ esistono e sono continue in un intorno di x^0, allora $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

$\hookrightarrow$ prodotto scalare.

Osserviamo che la funzione

$$v \longmapsto \nabla f(x_0) \cdot v$$
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

è lineare.

Dalla dimostrazione del teorema precedente, si vede anche che

$$f(x^0 + v) - f(x^0) - \nabla f(x_0) \cdot v =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^0 + t_1^* v_1, y^0 + v_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y_0)\right] v_1$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0 + t_2^* v_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\right] v_2$$

$$[0 < t_1^* < 1,\ 0 < t_2^* < 1]$$

da cui

$$\frac{|f(x^0 + v) - f(x^0) - \nabla f(x^0) \cdot v|}{\|v\|} \xrightarrow[\|v\| \to 0]{} 0$$

si ha quindi

$$f(x^0+v) = f(x^0) + \nabla f(x_0)\cdot v + R(v)$$

$$\text{con} \quad \frac{R(v)}{\|v\|} \xrightarrow{\|v\|\to 0} 0$$

(sviluppo di Taylor di ordine 1).

in altre parole, la funzione

$$\varphi(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)$$

approssima $f(x)$ vicino a x^0 "al primo ordine"

<u>Osservazione</u>

Consideriamo il grafico di φ ($\rightsquigarrow$ piano tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$)

$$\left[\begin{aligned} &\{(x, f(x^0)+\nabla f(x^0)\cdot(x-x_0)) \mid x\in\mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \\ &= \{(x^0, f(x^0)) + (h, \nabla f(x^0)\cdot h) \mid h\in\mathbb{R}^n\} = T_{f,x_0}\end{aligned}\right.$$

L'insieme $\{(h, \nabla f(x^0)\cdot h) \mid h\in\mathbb{R}^n\} = T$

è l'immagine dell'applicazione lineare

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \\ h &\longmapsto (h, \nabla f(x^0)\cdot h) \end{aligned}$$

La matrice associata a L è

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) & & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix}}\right\} n+1$$

le n-colonne sono linearmente indipendenti,

Quindi $T = L(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio di dimensione n

Un vettore di $\mathbb{R}^{n+1}$ che sia ortogonale a tutte le colonne della matrice è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0), -1\right)$$

Allora l'equazione del <u>piano tangente T_{f,x^0}</u> è

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_{n+1} - f(x^0)) = 0$$

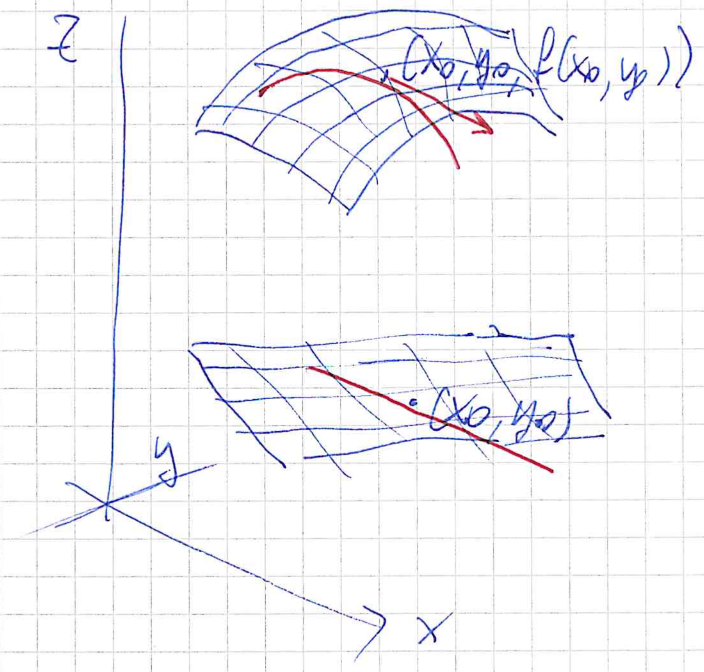
ovvero $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, x_i - x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, x_i^0 - f(x^0)$.

OSSERVAZIONI

1) Osserviamo che

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(x_0+tv,\ f(x_0+tv)\Big) = (v,\ \nabla f(x_0)\cdot v)$$

Quindi T è il piano generato dalle velocità delle curve di $\mathbb{R}^3$ ottenute "sollevando" le rette $\{x_0+tv \mid t\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sul grafico di f.



2) Osserviamo che, se $\|v\|=1$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0)\cdot v$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| \le \|\nabla f(x_0)\|$$

per $v^* = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ si ha

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v^*}(x_0) \right| = \|\nabla f(x_0)\|$$

Quindi $\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ è la direzione di massima pendenza del grafico di f in x_0.

PROPOSIZIONE

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

Sia $f : D \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1.

Sia $t_0 \in \mathring{I}$ t.c. $\gamma(t_0) \in \mathring{D}$.

Allora

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

Dim. (idea)

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0) + \gamma(t) - \gamma(t_0)) =$$

$$f(\gamma(t_0)) + \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + R(\gamma(t) - \gamma(t_0))$$

con $\dfrac{R(k)}{\|k\|} \xrightarrow{\|k\| \to 0} 0$

(96)

ove $\gamma(t)-\gamma(t_0)=\dot\gamma(t_0)(t-t_0)+r(t-t_0)$

con $\frac{r(s)}{s}\xrightarrow{s\to 0}0$

Quindi

$$f(\gamma(t))=f(\gamma(t_0))+\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma(t_0)(t-t_0)$$
$$+\ \nabla f(\gamma(t_0))\cdot r(t-t_0)$$
$$+\ R(\dot\gamma(t_0)(t-t_0)+r(t-t_0))$$

$\Rightarrow$

$$\left|\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}-\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma(t_0)\right|\le$$

$$\|\nabla f(\gamma(t_0))\|\,\frac{\|r(t-t_0)\|}{t-t_0}+\frac{|R(\dot\gamma(t_0)(t-t_0)+r(t-t_0))|}{|t-t_0|}$$

la tesi segue per $t\to t_0$.

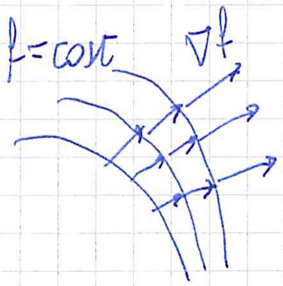
$\boxtimes$

OSSERVAZIONE

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ di classe C^1 e sia $\gamma(t)$ una curva di livello per f, cioè $f(\gamma(t))\equiv c$

Allora $0=\frac{d}{dt}f(\gamma(t))=\nabla f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)$.

Quindi il gradiente è ortogonale alle linee di livello di f



la direzione di massima pendenza è ortogonale alle linee di livello.