

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

(115)

Osservazione preliminare

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Allora l'insieme

$C^k(I, \mathbb{R}^n) = \{ u: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ di classe } C^k \}$ è uno spazio vettoriale con le operazioni

$$(u+v)(t) := u(t) + v(t) \quad t \in I$$

$$(\alpha u)(t) = \alpha u(t) \quad t \in I$$

dove $u, v \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'ignota è una funzione $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0 \quad \forall t$$

dove $F: \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_k \rightarrow \mathbb{R}^m$ è regolare.

L'esempio più semplice di equazione differenziale è la ricerca delle primitive:

$$u'(t) = f(t)$$

in questo caso $F(t, u, u') = u' - f(t)$.

La totale delle soluzioni è

$$u(t) = \int_0^t f(s) ds + C \quad C \in \mathbb{R}$$

(116)

Noi ci occuperemo di alcune classi particolari di equazioni differenziali in forma esplicita:

•) Equazioni di ordine 1 lineari (scalari)

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

con $a, b \in C^0(I)$

•) Equazioni non lineari di ordine 1 a variabili separate (scalari)

$$u'(t) = g(t) f(u(t))$$

con g, f continue

•) Equazioni lineari di ordine 2 (scalari)

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = c(t)$$

in particolare con i coefficienti costanti $a, b \in \mathbb{R}$.

Equazioni lineari di ordine 1

$$(*) \quad u' + a(t)u = b(t) \quad a, b : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Vediamo quali possono essere le soluzioni.

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$.

Sia $u(t)$ una soluzione di (*).

(117)

moltiplichiamo l'equazione per $e^{A(t)}$
otteniamo

$$u'(t) e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} u(t) = b(t) e^{A(t)}$$

da cui

$$\frac{d}{dt} (e^{A(t)} u(t)) = e^{A(t)} b(t).$$

Sia $t_0 \in I$. Allora, integrando tra t_0 e t ,

$$e^{A(t)} u(t) - e^{A(t_0)} u(t_0) = \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds$$

da cui

$$u(t) = e^{-(A(t)-A(t_0))} u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(A(t)-A(s))} b(s) ds$$

Viceversa, dato $u_0 \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$,

definendo

$$u(t) := e^{-(A(t)-A(t_0))} u_0 + \int_{t_0}^t e^{-(A(t)-A(s))} b(s) ds$$

si ha che

$$\begin{aligned} u'(t) &= -a(t) e^{-(A(t)-A(t_0))} u_0 - a(t) \int_{t_0}^t e^{-(A(t)-A(s))} b(s) ds \\ &\quad + e^{-A(t)} e^{A(t)} b(t) \\ &= -a(t) u(t) + b(t). \end{aligned}$$

(118)

Abbiamo quindi completamente risolto il problema, cioè abbiamo trovato le totalità delle soluzioni di (*), ovvero

$$\left\{ u(t) = e^{-\int_{t_0}^t (A(s) - A(t_0)) ds} u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s (A(\tau) - A(t_0)) d\tau} b(s) ds \mid u_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

Non solo: abbiamo anche risolto il cosiddetto problema di Cauchy associato a (*), ovvero

$$\begin{cases} u' + a(t)u = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove t_0 e u_0 sono assegnati.

Il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione di (*) che soddisfi le "condizione iniziale" $u(t_0) = u_0$.

Esempio

$$u' = t^3 - tu$$

o equivalentemente

$$u' + tu = t^3$$

in questo caso $a(t) = t$, $b(t) = t^3$

una primitiva di $a(t)$ è $\frac{1}{2}t^2 = A(t)$.

fissato $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{2}(t^2 - s^2)} s^3 ds$$

calcoliamo

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{1}{2}s^2} s^3 ds &= \int (s e^{-\frac{1}{2}s^2}) s^2 ds \\ &= e^{-\frac{1}{2}s^2} s^2 - \int e^{-\frac{1}{2}s^2} 2s ds \\ &= e^{-\frac{1}{2}s^2} s^2 - 2 e^{-\frac{1}{2}s^2} + C \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} u_0 + e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 e^{-\frac{1}{2}t^2} - t_0 e^{\frac{1}{2}t_0^2} + 2 e^{-\frac{1}{2}t_0^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} u_0 + (t^2 - 2) - (t_0^2 - 2) e^{-\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)} \end{aligned}$$

Applicazione

Decadimento radioattivo.

$m(t)$ = massa al tempo t di una sostanza radioattiva.

In un piccolo intervallo di tempo Δt si ha una perdita di massa radioattiva

secondo la legge

$$m(t) - m(t + \Delta t) = K m(t) \Delta t$$

K costante caratteristica della sostanza.

segue che

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -K m(t)$$

per $\Delta t \rightarrow 0$ otteniamo

$$m'(t) = -K m(t)$$

da cui

$$m(t) = e^{-k(t-t_0)} m(t_0)$$

scegliendo $t_0 = 0$,

$$m(t) = e^{-kt} m(0)$$

Tempo di dimezzamento: Il tempo necessario perché la massa si dimezzi.

$$\begin{cases} m(T) = \frac{1}{2} m(0) \\ = e^{-kT} m(0) \end{cases}$$

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

$$kT = \log 2$$

$$T = \frac{\log 2}{K}$$

OSSERVAZIONE

Osserviamo attentamente l'equazione

$$u' + a(t)u = b(t) \quad (*)$$

e la sua soluzione generale

$$u(t) = \underbrace{e^{-(A(t)-A(t_0))}}_{\text{risolve } u' + a(t)u = 0} u_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{-(A(t)-A(s))} b(s) ds}_{\text{risolve } u' + a(t)u = b(t)}$$

quindi $u(t)$ è la somma di una soluzione di $u' + au = b$ fissata, e di una soluzione di $u' + au = 0$ con parametro libero u_0 da determinare.

Questa osservazione ci suggerisce di provare e caratterizzare in modo più preciso l'insieme delle soluzioni di (*).

Consideriamo l'equazione omogenea

$$u' + a(t)u = 0. \quad (**)$$

Osserviamo che la somma di due soluzioni è ancora una soluzione, così come il prodotto tra un numero reale e una soluzione.

(122)

si ha cioè che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea (***) è uno spazio vettoriale.

Inoltre sappiamo che le soluzioni sono tutte della forma

$$e^{-(A(t) - A(t_0))} u_0$$

dove t_0 è fissato e u_0 è libero.

Abbiamo quindi che \mathbb{R} tratta di uno spazio vettoriale di dimensione 1.

L'insieme delle soluzioni di (***) è quindi $\{A\varphi(t) \mid A \in \mathbb{R}\}$ dove $\{\varphi\}$ è una base dello spazio delle soluzioni di (***)

Osserviamo anche che se ψ risolve (*) e φ risolve (***) allora $\varphi + \psi$ risolve (***)

Inoltre se ψ_1 e ψ_2 risolvono (*), si ha che $\psi_1 - \psi_2$ risolve (***)

Segue che

$$\{\text{soluzioni di (***)}\} = \{A\varphi + \psi \mid A \in \mathbb{R}\}$$

dove $\{\varphi\}$ è una base dello spazio delle soluzioni di (***) e ψ è una soluzione particolare di (*).

Equazioni scalari di ordine 1 a variabili separate

Si tratta di equazioni della forma

$$u'(t) = g(t) f(u(t)) \quad (\star)$$

o più in breve

$$u' = g(t) f(u)$$

L'ipotesi è che g e f siano continue.

Se $f(\bar{u}) = 0$ allora $u(t) \equiv \bar{u}$ è soluzione.

Consideriamo quindi il caso in cui

$$f:]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{è t.c. } f(u) \neq 0 \quad \forall u \in]\alpha, \beta[.$$

Supponiamo che $u:]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ sia una soluzione. Allora

$$u'(t) = g(t) f(u(t)),$$

quindi

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = g(t)$$

$$\text{Siccome } F:]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c. } F'(u) = \frac{1}{f(u)}$$

allora

$$\frac{d}{dt} F(u(t)) = g(t) \quad \text{e quindi}$$

$$F(u(t)) = G(t) + C$$

dove $G'(t) = g(t)$.

Se ora F è invertibile, si ha

$$u(t) = F^{-1}(G(t) + C)$$

(124)

Viceversa, se definiamo $v(t) = F^{-1}(G(t) + C)$

$$\text{allora } v'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(G(t) + C))} g(t) = \frac{1}{\frac{1}{F'(G(t) + C)}} \cdot g(t)$$

$$\text{e quindi } v'(t) = f(v(t))g(t)$$

cioè v risolve $(*)$.

Se abbiamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = g(t)f(u) \\ u(t_0) = u_0 \neq 0 \end{cases}$$

la costante C si determina in modo da soddisfare la condizione iniziale

$$F(u_0) = G(t_0) + C \rightarrow C = F(u_0) - G(t_0)$$

Esempio

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

in questo caso $g(t) \equiv 1$.

Risolviemo l'equazione $u' = u^2$

$$\frac{1}{u^2} u' = 1$$

$$F(u) = -\frac{1}{u}$$

$$G(t) = t + C$$

Allora la soluzione è

$$-\frac{1}{u(t)} = t + C$$

da cui $u(t) = -\frac{1}{t+C}$

Determiniamo C .

$$C = -\frac{1}{u_0}$$

quindi la soluzione è

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t}$$

N.B. Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{u_0}} u(t) = +\infty$.

Si dice che $u(t)$ "esplode in tempo finito".

ESEMPIO

$$u' = e^{t-u}$$

$$e^u u' = e^t$$

$$F(u) = e^u$$

$$G(t) = e^t$$

$$\Rightarrow e^{u(t)} = e^t + C$$

$$\Rightarrow u(t) = \log(e^t + C)$$

Se abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e^{t-u} \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$,$$

determinismo C.

126

$$e^{\mu_0} = e^{t_0} + C \rightarrow C = e^{\mu_0} - e^{t_0}.$$

Allora la soluzione è

$$u(t) = \log(e^t + e^{\mu_0} - e^{t_0}).$$