EQUAZIONI LINEARI SCALARI DI ORDINE 2

Consideriamo equazioni differenziali di ordine 2 del tipo

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t) \qquad (1)$$

insieme all'equazione omogenea associata

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \qquad (2)$$

Osserviamo che se u_1, u_2 sono soluzioni di (2), allora $A_1u_1 + A_2u_2$ è ancora soluzione di (2) $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{R}$.

Ciò significa che l'insieme delle soluzioni di (2) è uno spazio vettoriale.

Si può dimostrare che tale spazio vettoriale ha dimensione 2.

Quindi per trovare la soluzione generale di (2) bisogna trovare due soluzioni linearmente indipendenti φ_1, φ_2, e allora ogni soluzione $u(t)$ di (2) sarà del tipo $u(t) = A_1\varphi_1(t) + A_2\varphi_2(t)$, con $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$.

Osserviamo anche che se ψ risolve (1) allora $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ anche $\psi + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$ risolve (1).

Viceversa, se ψ_1 e ψ_2 risolvono (1) allora $\psi_1 - \psi_2$ risolve (1) e quindi $\exists\, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\psi_1 - \psi_2 = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$$

da cui $\psi_1 = \psi_2 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$.

Riassumendo, per determinare tutte le soluzioni di (1) devo:

1) Trovare due soluzioni linearmente indipendenti di (2), φ_1 e φ_2
2) Trovare una soluzione di (1), ψ.

allora

$$\{\text{soluzioni di } (1)\} = \{A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \psi \mid A_1, A_2 \in \mathbb{R}\}$$

Ci occuperemo in dettaglio del caso in cui $a(t)$ e $b(t)$ sono costanti, e $f(t)$ ha una forma particolare, precisamente

$$f(t) = \begin{cases} t^m e^{\alpha t} \cos\omega t \\ t^m e^{\alpha t} \sin\omega t \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$; $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \geq 0$.

Cominciamo a considerare l'equazione omogenea (2) con coefficienti costanti.

$$u'' + a u' + b u = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Vogliamo trovare delle soluzioni linearmente indipendenti. L'idea è di cercare soluzioni del tipo $e^{\lambda t}$, con λ eventualmente complesso.

Si ha che $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ $\quad (e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$.

Inserendo in (3) si ottiene

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a \lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

Poiché $e^{\lambda t} \neq 0$ $\forall t$, deve essere

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Questo è un polinomio in λ di grado 2, detto polinomio caratteristico di (3)

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Abbiamo visto che $e^{\lambda t}$ risolve (3) se e solo se $P(\lambda) = 0$.

Cerchiamo quindi le radici di $P(\lambda)$

Ci sono tre casi:

1) $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ci sono due soluzioni reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

2) $\Delta = 0$ c'è una radice reale di molteplicità due $\lambda = -\frac{a}{2}$

3) $\Delta < 0$ ci sono due radici complesse coniugate

$$-\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} =: \alpha \pm i\omega \quad , \quad \omega \neq 0$$

•) Nel caso 1 le funzioni $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono linearmente indipendenti.

Infatti se $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t$

allora $e^{\lambda_1 t}\left(A_1 + A_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\right) = 0 \quad \forall t$

Se $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ ho

$$A_1 + A_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0 \quad \forall t$$

e per $t \to +\infty$ ottengo $A_1 = 0$, e quindi anche $A_2 = 0$.

Se $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ faccio tendere $t \to -\infty$.

•) Nel caso 2 ho una sola soluzione, $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$. Mi serve una seconda soluzione.

Vediamo che $\varphi_2(t) = t e^{\lambda t}$ fa al caso nostro.

Si ha $\varphi_2'(t) = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}$

$$\varphi_2''(t) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t}$$

allora

$$\varphi_2'' + a\varphi_2' + b\varphi_2 = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t} + a(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) + b\, t e^{\lambda t}$$

$$= \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0} t e^{\lambda t} + \underbrace{(2\lambda + a)}_{=0} e^{\lambda t}$$

quindi φ_2 risolve (3)

Verifichiamo che $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$, $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}$ sono indipendenti:

$$A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 t = 0 \quad \forall t \Rightarrow A_1 = 0 \wedge A_2 = 0 .$$

Abbiamo quindi trovato una base per lo spazio delle soluzioni di (3),

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t} .$$

•) Abbiamo due soluzioni complesse,

$$e^{(\alpha + i\omega)t}, \quad e^{(\alpha - i\omega)t}$$

ovvero

$$e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \tilde{\varphi}_1(t)$$

$$e^{\alpha t}(\cos \omega t - i \sin \omega t) = \tilde{\varphi}_2(t)$$

si ha che $\varphi_1(t) = \dfrac{\tilde{\varphi}_1(t) - \tilde{\varphi}_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos \omega t$

e $\varphi_2(t) = \dfrac{\tilde{\varphi}_1(t) - \tilde{\varphi}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin \omega t$

sono ancora soluzioni, e sono <u>reali</u>

Inoltre sono indipendenti, perché se

$$A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t = 0 \quad \forall t$$

allora $A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t = 0 \quad \forall t$

Se fosse $A_2 \neq 0$ avrei $\dfrac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \dfrac{A_1}{A_2} \quad \forall t$

$= \tan(\omega t)$ assurdo.

quindi $A_2 = 0$, e di conseguenza anche $A_1 = 0$.

<u>Ricapitolando</u>

$$u'' + a u' + b = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

$$\Delta = a^2 - 4b$$

1) $\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

$$\lambda_{12} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

2) $\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1(t) = e^{\lambda t} \qquad \varphi_2(t) = t e^{\lambda t}$

$$\lambda = -\frac{a}{2}$$

3) $\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t \qquad \varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t$

$$\alpha = -\frac{a}{2} \qquad \omega = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

ESEMPIO

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$\lambda = 2$ radice di molteplicità 2

$\rightarrow$ $\varphi_1 = e^{2t}$ $\quad \varphi_2 = te^{2t}$ sono base dello spazio delle soluzioni.

PROBLEMA DI CAUCHY

Essendo l'equazione di ordine 2, bisogna assegnare come dato iniziale sia la posizione che la velocità

$$\begin{cases} u'' + au' + bu = 0 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases}$$

Si trova una base dello spazio delle soluzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

Bisogna poi determinare $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\begin{cases} A_1 \varphi_1(0) + A_2 \varphi_2(0) = u_0 \\ A_1 \varphi_1'(0) + A_2 \varphi_2'(0) = v_0 . \end{cases}$$

È un sistema lineare in A_1, A_2 che si risolve in modo standard.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo visto sopra che la soluzione generale è $u(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}$.

Si ha $u'(t) = 2Ae^{2t} + Be^{2t} + 2Bte^{2t}$

Quindi

$$0 = u(0) = A$$
$$1 = u'(0) = 2A + B$$

da cui $A = 0$, $B = 1$

La soluzione quindi è $u(t) = te^{2t}$.

ESEMPIO

L'oscillatore armonico con smorzamento

$$\boxed{u'' + 2\gamma u' + \omega_0^2 u = 0 \qquad ; \ \gamma \geq 0, \ \omega_0 > 0}$$

ω_0^2 costante di elasticità della molla
2γ coefficiente di attrito

$$u'' = \underbrace{-\omega_0^2 u}_{\text{forza di richiamo}} \underbrace{- 2\gamma u'}_{\text{attrito}}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

Se $\gamma < \omega_0$ (domina la forza elastica)

le soluzioni sono $-\gamma \pm i\omega$

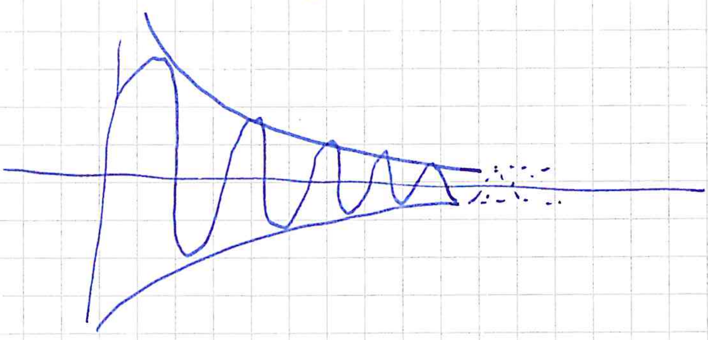
dove $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\longrightarrow \quad e^{-\gamma t}\cos\omega t\,, \quad e^{-\gamma t}\sin\omega t$

La soluzione generale è

$$u(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\gamma t}$$

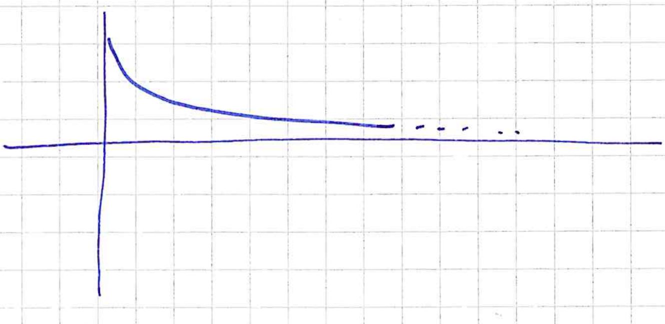
Oscillazione smorzata



Se $\gamma > \omega_0$ (domina l'attrito) le soluzioni sono $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, entrambe negative

La soluzione generale è

$$u(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t}$$



Infine se $\gamma = \omega_0$

ho una sola soluzione, $P(\lambda) = (\lambda + \gamma)^2$

la soluzione generale è

$$u(t) = B e^{-\gamma t} + A t e^{-\gamma t} = (At + B) e^{-\gamma t}$$